Université Paul Verlaine – Metz
Fondements de l'Analyse (L3)

Année universitaire 2009–2010

Examen du 6 janvier 2010
Durée : 3 heures

Questions de cours

1. **[0,5 pt]** Donner la définition d'un espace topologique quasi-compact.
2. **[0,5 pt]** Donner la définition d'un point d'accumulation d'une partie non vide A d'un espace topologique X.
3. **[1 pt]** Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass sur l'existence de points d'accumulation.
4. **[1 pt]** Donner la définition d'un espace de Banach.

Exercice 1. [5 points]

On munit l'ensemble $X = \mathbb{R}$ des nombres réels de la topologie $\mathcal{T}$ définie par la condition suivante : une partie C de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si C est une partie finie (ou vide) ou bien $C = \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie.

(b) Montrer que toute partie infinie Y de $\mathbb{R}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on ne peut pas choisir une base dénombrable pour le filtre des voisinages $\mathcal{V}_x$ de x dans $(X, \mathcal{T})$.

(d) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.

(e) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique quasi-compact.

(f) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique connexe.

Exercice 2. [7 points]

Soit (X, d) un espace métrique. On définit sur l'ensemble $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ la fonction $d_\times : X \times X \to \mathbb{R}$ par $d_\times\big((x, y), (x', y')\big) = d(x, x') + d(y, y')$.

(a) Montrer que $d_\times$ est une métrique sur $X \times X$.

(b) Montrer que la topologie associée à $d_\times$ coïncide avec la topologie produit de la topologie sur X associée à d.

(c) Montrer que pour tous $x, x', y, y' \in X$ on a

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d_\times((x, y), (x', y')) .$$

En déduire que la fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue si $X \times X$ est muni de la topologie associée à $d_\times$ et $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle.

Soient A et B deux parties non vides de X. On pose

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\} .$$

(d) Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $d(A, B) = 0$.

(e) Donner un exemple qui montre que la réciproque de (d) n'est pas vraie en général, c'est-à-dire qu'on peut avoir $d(A, B) = 0$ pour deux parties A et B telles que $A \cap B = \emptyset$.

(f) Montrer que si A et B sont deux parties compactes de X, alors il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $d(A, B) = d(a_0, b_0)$.

[*Indication :* Utiliser la partie (c)]

(g) Déduire de ce qui précède que pour deux parties compactes A et B de X on a : $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 3. [7 points]

(a) Soient X un espace topologique, R une relation d'équivalence sur X et X/R l'espace topologique quotient. Le graphe de R est la partie $\Gamma(R)$ de $X \times X$ définie par $\Gamma(R) = \{(x, y) \in X \times X : xRy\}$. Montrer que si X/R est séparé alors $\Gamma(R)$ est une partie fermée de l'espace topologique produit $X \times X$.

Par la suite on considère $X = \big(\mathbb{R} \times \{-1\}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{1\}\big)$ muni de la topologie induite de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$.

(b) Décrire les ouverts de X. En déduire que $\mathbb{R} \times \{-1\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$ sont deux ouverts de X.

On définit une relation R sur X par :

$$(x, y)R(x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \text{ et } x = x', \text{ ou bien } x = x' = 0 \text{ et } y = y' \,.$$

(c) Montrer que R est une relation d'équivalence sur X.

On peut remarquer que l'espace quotient X/R est une droite réelle avec origine dédoublée. On munit X/R de la topologie quotient.

(d) Montrer que $\Gamma(R)$ n'est pas fermé dans $X \times X$. En déduire que l'espace topologique quotient X/R n'est pas séparé.

On note $[(x, y)]$ la classe d'équivalence de (x, y) et on note $p : X \to X/R$ la projection canonique $(x, y) \mapsto [(x, y)]$.

(e) Montrer que p est une application ouverte.

(f) On note p_1 la restriction de p à $\mathbb{R} \times \{1\}$. Déterminer $p_1(\mathbb{R} \times \{1\})$.

(g) Montrer que p_1 est un homéomorphisme de $\mathbb{R} \times \{1\}$ sur $p_1(\mathbb{R} \times \{1\})$.

Exercice 4. [2 points]

Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si les boules fermées de (X, d) sont compactes, alors (X, d) est complet.