Université Paul Verlaine – Metz
Fondements de l'Analyse (L3)

Année universitaire 2009–2010

Examen du 23 juin 2010
Durée : 3 heures

Questions de cours

1. **[1,5 pt]** Décrire la topologie quotient. Donner explicitement la famille des ouverts et des fermés de cette topologie.
2. **[0,5 pt]** Donner la définition d'espace topologique connexe.
3. **[1 pt]** Donner la définition de suite de Cauchy dans un espace métrique et la définition d'espace métrique complet.
4. **[1 pt]** Donner un exemple d'espace de Banach.

Exercice 1. [2 points]

On muni $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle. Soient L et K deux parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble $L + K = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in L, y \in K\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. [5 points]

Soit (X, d) un espace métrique. Pour deux parties non vides A et B de X, on pose

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}\,,$$
$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}\,.$$

(a) Montrer que $d(A, B) \leq \operatorname{diam}(A \cup B)$.

(b) Montrer que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B)$.

(c) Montrer que s'il existe deux parties non vides A et B telles que $X = A \cup B$ et $d(A, B) > 0$, alors X n'est pas connexe dans la topologie associée à la métrique.

[*Indication :* On pose $d(A, x) = \inf\{d(a, x) : a \in A\}$. Si $d(A, B) = 2\varepsilon > 0$, on pourrait considérer $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(A, x) < \varepsilon\}$.]

Exercice 3. [10 points]

Soit X un ensemble avec au moins deux éléments et soit $x \in X$ fixé. On pose

$$\mathcal{T}(x) = \{\emptyset\} \cup \{U : U \subset X \text{ et } x \in U\}\,.$$

(a) Montrer que $\mathcal{T}(x)$ est une topologie sur X.

(b) Donner la famille des fermés de $(X, \mathcal{T}(x))$.

(c) Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière dans $(X, \mathcal{T}(x))$ d'une partie A de X.

[*Indication :* Distinguer les cas où $x \in A$ et $x \notin A$.]

(d) Est-ce que $(X, \mathcal{T}(x))$ est un espace topologique séparé ?

(e) Montrer que $(X, \mathcal{T}(x))$ n'est pas quasi-compact si X n'est pas fini.

(f) Montrer que $(X, \mathcal{T}(x))$ est un espace topologique connexe.

(g) Soit Y un deuxieme ensemble et $y \in Y$ fixé. On pose $\mathcal{T}(y) = \{\emptyset\} \cup \{V : V \subset Y \text{ et } y \in V\}$.

  (g1) Montrer qu'une application $f : (X, \mathcal{T}(x)) \to (Y, \mathcal{T}(y))$ est continue si et seulement si l'un des deux cas suivants a lieu :

    i. f est constante sur X, ou

    ii. $f(x) = y$.

  (g2) Montrer qu'une application $f : (X, \mathcal{T}(x)) \to (Y, \mathcal{T}(y))$ est ouverte si et seulement si l'un des deux cas suivants a lieu :

    i. f est surjective et $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, ou

    ii. $y \notin f(X)$.

Exercice 4. [3 points]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

[*Indication :* Pour vérifier par exemple que la somme de deux éléments de $\overline{F}$ est un élément de $\overline{F}$, il suffit de montrer que $\overline{F} \times \overline{F} \subset s^{-1}(\overline{F})$, où $s : E \times E \to E$ est donnée par $s(x, y) = x + y$.]