Université Paul Verlaine – Metz — Année universitaire 2009-2010

Fondements de l'analyse (L3)

Interrogation écrite : Espaces métriques et topologiques
Durée : 30 minutes

Question 1 [**4 points**]

(a) Donner la définition de semi-distance.

(b) Quelle condition supplémentaire donne une distance ?

(c) Donner un exemple de semi-distance qui n'est pas une distance.

Question 2 [**5 points**]

(a) Donner la définition de topologie sur un ensemble non vide X.

(b) Décrire la topologie associée à un espace (semi-)métrique.

Question 3 [**5 points**] Soient (X, d) et (X', d') deux espaces (semi-)métriques. Soit $f : X \to X'$ une fonction de X dans X'.

(a) Donner la définition de continuité sur X de f.

(b) Donner la définition de continuité uniforme sur X de f.

Question 4 [**3,5 points**] Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d) et soit $x \in \overline{A}$. On note $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ la boule ouverte de centre x et rayon ε. Cochez toutes les réponses qui sont correctes :

☐ (a) Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

☐ (b) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

☐ (c) Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

☐ (d) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $d(a, x) < \varepsilon$.

☐ (e) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in A$ on a $d(a, x) < \varepsilon$.

☐ (f) $x \notin A^\circ$.

☐ (g) $x \notin (X \setminus A)^\circ$.

Question 5 [**3,5 points**] Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d) et soit $x \in A^\circ$. On note $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ la boule ouverte de centre x et rayon ε. Cochez toutes les réponses qui sont correctes :

☐ (a) Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \subset A$.

☐ (b) Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$.

☐ (c) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

☐ (d) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A$ on a $d(x, a) < \varepsilon$.

☐ (e) Il existe $\varepsilon > 0$ et $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$.

☐ (f) $x \notin \operatorname{Fr}(A)$

☐ (g) $x \in \overline{A}$