Université Paul Verlaine – Metz | Année universitaire 2009-2010

Fondements de l'analyse (L3)

Interrogation écrite 2 : continuité, construction de topologies, compacité
Durée : 30 minutes

Question 1 [5 points] Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, R une relation d'équivalence sur X et X/R l'ensemble quotient de X qui lui est associé. On muni X/R de la topologie quotient.

(a) Décrire la famille d'ouverts de X/R.

(b) En déduire la famille des fermés de X/R.

(c) Donner la famille des voisinages d'un point $[x] \in X/R$.

Question 2 [3 points] Soient $(X_1, \mathcal{O}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{O}_n)$ des espaces topologiques. On muni le produit cartesien $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ de la topologie produit.

(a) Décrire la famille d'ouverts de X.

(b) En déduire la famille des fermés.

Question 3 [8 points] Lesquels parmi les couples d'espaces topologiques suivants sont homéomorphes ? Si les espaces sont homéomorphes, donner un homéomorphisme entre eux ; en cas contraire, expliquer pourquoi les espaces ne sont pas homéomorphes.

(a) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ munis de la topologie induite de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $[-1, 1]$ muni de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}$.

(c) Les intervalles $]a, b[$ (où $a, b, \in \mathbb{R}$ et $a < b$) et $]-1, 1[$, munis de la topologie induite de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

(d) $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et $\mathbb{R}$ muni de la topologie engendrée par la famille des intervalles fermés $[x, x+1]$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Question 4 [2 points] Lister les ouverts de la topologie sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ qui est engendrée par la famille $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{a, c, d\}\}$.

Question 5 [4 points] Cochez la ou les conditions qui sont équivelentes à la semi-compacité d'un espace topologique X :

☐ (a) Pour toute famille $\mathcal{F} = \{F_j\}_{(j \in I)}$ de parties fermées de X telle que $\cup_{j \in I} F_j = X$, il existe une sous-famille finie $\mathcal{F}' = \{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ de X telle que $F_{j_1} \cup \cdots \cup F_{j_n} = X$.

☐ (b) Pour toute famille $\mathcal{F} = \{F_j\}_{(j \in I)}$ de parties fermées de X telle que $\cap_{j \in I} F_j = \emptyset$, il existe une sous-famille finie $\mathcal{F}' = \{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ de $\mathcal{F}$ telle que $F_{j_1} \cap \cdots \cap F_{j_n} = \emptyset$.

☐ (c) Il existe une famille $\mathcal{F} = \{F_j\}_{(j \in I)}$ de parties fermées de X telle que $\cup_{j \in I} F_j = X$ et telle que, pour toute sous-famille finie $\mathcal{F}' = \{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ de $\mathcal{F}$, on a $F_{j_1} \cup \ldots F_{j_n} \neq X$.

☐ (d) Il existe une famille $\mathcal{F} = \{F_j\}_{(j \in I)}$ de parties fermées de X telle que $\cap_{j \in I} F_j = \emptyset$ et telle que, pour toute sous-famille finie $\mathcal{F}' = \{F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}\}$ de $\mathcal{F}$, on a $F_{j_1} \cap \ldots F_{j_n} \neq \emptyset$.