Université de Metz

Master 1 de Mathématiques **Année 2009/2010**

TD n° 1. Groupes et géométrie

Révisions-Compléments

Exercice 1.

Soit $(G, .)$ un groupe.

a. Soit x un élément de G d'ordre n. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $y = x^m$. Montrer que y est d'ordre fini et déterminer son ordre.

b. Soient x et y deux éléments de G, tels que $o(x) = r$, $o(y) = s$ et $xy = yx$. Montrer que xy est d'ordre fini et calculer $o(xy)$ lorsque r et s sont premiers entre eux.

c. **<u>Attention</u>**: Dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Quels sont les ordres de A et de B ?

2) Quel est l'ordre de AB? Qu'en déduit-on?

d.* Plus généralement, Si $xy = yx$, montrer qu'il existe dans le sous-groupe engendré par x et y un élément d'ordre $ppcm(o(x), o(y))$.

e. Soit G' un autre groupe. Si x (resp x') est un élément d'ordre fini de G (resp de G'), quel est l'ordre de (x, x') dans le groupe $G \times G'$?

f. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un monomorphisme de groupes. Montrer que f conserve l'ordre des éléments. Qu'en est-il si f est juste un morphisme?

g. Montrer que deux éléments conjugués ont même ordre et que pour tous les éléments x et y de G, xy et yx ont même ordre.

Exercice 2.

Soient G_1, G_2 deux groupes et f un épimorphisme de groupes de G_1 dans G_2.

a) On suppose que G_1 est d'ordre fini. Montrer que G_2 est d'ordre fini et que $o(G_2)$ divise $o(G_1)$.

b) On suppose que G_1 et G_2 sont finis et soit K un sous-groupe de G_2. Montrer que $K = f(f^{-1}(K))$ et que $o(f^{-1}(K)) = o(K)o(\ker f)$.

c) Si f est juste un morphisme de groupes et H un sous-groupe de G_1, determiner $f^{-1}(f(H))$.

d) Si f est un isomorphisme et H_1 un sous groupe normal de G_1, on pose $H_2 = f(H_1)$. Montrer que f induit un isomorphisme de groupes de $G_1/_{H_1}$ dans $G_2/_{H_2}$.

Exercice 3.

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, .)$, on pose $HK = \{hk \ ; \ (h, k) \in H \times K\}$.

1. On suppose H et K finis ; démontrer que $\mathrm{card}(HK) = \dfrac{\mathrm{card}(H)\mathrm{card}(K)}{\mathrm{card}(H \cap K)}$. En déduire que HK et KH ont le même cardinal.

2. a. montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

b. Montrer que si tel est le cas, $HK = < H \cup K >$.

c. Montrer que si H (ou K) est normal dans G, alors HK est un sous-groupe de G.

3. Soit $\phi : H \times K \longrightarrow G$ l'application définie par $\phi(h, k) = hk$. A quelles conditions ϕ est-il un homomorphisme, un homomorphisme injectif ? Si ϕ est un isomorphisme, on dit que G est <u>produit direct</u> de H et K.

4. Si G est produit direct de H et K, démontrer que H et K sont normaux dans G.
5. On considère sur G la relation

$$\forall x, y \in G, \quad x \equiv y \Longleftrightarrow x \in KyH$$

a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.(dont les classes d'équivalence s'appellent les doubles classes de G modulo (H, K))
b) Si H et K sont finis, déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence.

Exercice 4.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice deux. Montrer que H est distingué.

Exercice 5.
(*Formule des indices*). Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, .)$ tels que $K \subset H$. On suppose que 2 des 3 quantités $[G : H]$, $[G : K]$ et $[H : K]$ sont finies ; montrer alors que la troisième l'est aussi et que l'on a $[G : K] = [G : H] \times [H : K]$.

Exercice 6.
Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, .)$. On suppose $[G : K]$ fini.
a. Montrer que $[H : H \cap K] \leq [G : K]$; en conclure que $[H : H \cap K]$ est fini.
b. Montrer que si $G = HK$ on a $[H : H \cap K] = [G : K]$.

Exercice 7.

Soient p un nombre premier et G un p-groupe(càd un groupe dont l'ordre est une puissance de p).
a) Montrer que tout sous-groupe distingué $H \neq \{e\}$ de G rencontre le centre de G en un point autre que l'élément neutre e. (Indication: On peut faire opérer G sur H par conjugaison)

b) En déduire que le centre d'un p-groupe n'est jamais trivial.

c) Soit G un groupe quelconque. On appelle sous-groupe dérivé de G, et on note $D(G)$, le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in G$. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que c'est le plus petit sous-groupe H de G distingué tel que G/H est abélien.

d) Soient p un nombre premier et G un groupe non abélien d'ordre p^3. Montrer que le centre de G, noté $Z(G)$, est d'ordre p.

e) En déduire que $Z(G) = D(G)$.