Université de Metz

Master 1 de Mathématiques **Année 2009/2010**

TD n° 2. Groupes et géométrie
Groupes symétriques et opérations

Exercice 1.

Soient $n \geq 3$ et $\gamma_r = (i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ un cycle de longueur r de S_n.

a. Démontrer que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \dots\ \sigma(i_r))$. Déterminer le centre de S_n. Montrer que deux r-cycles de S_n sont conjugués dans S_n.

b. Démontrer que pour tout $(j,k) \in \{2,\dots,n\}^2$ $j \neq k$, on a $(j\ k) = (1\ j)(1\ k)(1\ j)$ puis, si $k - j > 1$, $(j\ k) = (k-1\ k)(j\ k-1)(k-1\ k)$.

c. Démontrer que S_n est engendré par

(i) les $(n-1)$ transpositions $(1\ i)$ $(2 \leq i \leq n)$

(ii) les $(n-1)$ transpositions $(i\ i+1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$

(iii) les 2 permutations $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$

Exercice 2.

Soient n et r deux entiers naturels tels que $2 \leq r \leq n$. Démontrer qu'il existe $(r-1)!C_n^r$ cycles de longueur r dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. En déduire que $(r-1)!C_n^r$ divise $n!$.

Exercice 3.

Soit n un entier non nul.

1) Montrer que dans le groupe symétrique S_n deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont les mêmes longueurs des cycles dans leur décomposition en produits de cycles disjoints.

2) On appelle partition de l'entier n toute suite finie décroissante d'entiers dont la somme est égale à n. Montrer que le nombre de partitions de l'entier n est égal au nombre de classes de conjugaisons de S_n.

3) Déterminer tous les morphismes de groupes de S_n à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

4) Qu'en est-il si on repmplace S_n par A_n dans 3)?(on pourra considérer le cas $n = 3$ et le cas $n \geq 5$)

Exercice 4.

Soient $n \in \mathbf{N}$ $(n \geq 2)$, S_n le groupe symétrique et A_n le groupe alterné.

a. On suppose $n \geq 4$. Démontrer que

(i) si i, j, k, l sont 4 éléments distincts de $\{1, ..., n\}$

$$(i\ j) \circ (j\ k) = (i\ j\ k) \quad \text{et} \quad (i\ j) \circ (kl) = (i\ j\ k) \circ (j\ k\ l)$$

(ii) A_n est engendré par les 3-cycles.

b. On suppose $n \geq 5$.

(i) Démontrer que deux 3-cycles de A_n sont conjugués dans A_n.

(ii) Si σ est un 3-cycle, démontrer qu'il existe $s \in A_n$ tel que $\sigma = \sigma^{-1} \circ s^{-1} \circ \sigma \circ s$. En déduire que A_n est le sous-groupe des commutateurs de A_n et S_n .

(iii) Déterminer tous les morphismes de groupes de S_n à valeurs dans un groupe abélien G.

Exercice 5.

On considère le groupe alterné A_4 et on note V la partie de A_4 formée par les éléments d'ordre 1 ou 2. Soit $H = \{id, (12)(34)\}$.
1) Soient $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ deux à deux distincts. Calculer le produit $(ij)(kl)$ par $(ik)(jl)$. En déduire que V est un sous-groupe de A_4.
2) Montrer que H est distingué dans V et que V est distingué dans A_4. H est-il distingué dans A_4 Qu'en déduit-on?

Exercice 6.

1) Montrer que tout groupe fini G s'identifie à un sous-groupe d'un groupe symétrique.
2) Si g est un élément de G quelle est alors la signature de la permutation associée à g?
3) On suppose que $|G| = 6$. Déterminer le plus petit entier n tel que G s'identifie à un sous-groupe de S_n.(Indic: Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 6).
4) Même question si $|G| < 6$.

Exercice 7.

Soit $n \geq 3$.
1) Montrer que deux n-cycles sont conjugués dans S_n. En déduire le stabilisateur d'un n-cycle dans l'action par conjugaison de S_n sur lui même.
2) On suppose que n est impair. Montrer que les n-cycles sont dans A_n et qu'ils forment (dans A_n) deux classes de conjugaison.
3) On suppose dans la suite de l'exercice que $n = 5$ et on considère un 5-cycle c. Montrer que c et c^2 représentent les deux classes de conjugaisons des 5-cycles dans A_5.
4) Déterminer toutes les classes de conjugaison de $\mathbb{A}_5$ et leur cardinal.
5) Déduire de ce qui précède que A_5 est simple.

Exercice 8.

Soient K un corps commutatif fini d'ordre q et n un entier non nul. On considère le groupe linéaire $GL(K^n)$ formé par les matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans K. Pour tout entier $r \in \{1, \ldots, n\}$, on note $G_{n,r}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de K^n de dimension r.

3) Déterminer, pour tout entier $s \in \{1, \ldots, n\}$, le nombre de suites libres $(x_1, \ldots, x_s)$ de K^n.

4) $a)$ En déduire le cardinal de $GL(K^n)$.

$b)$ Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices de déterminant 1.

5) Montrer qu'en posant pout tout $u \in GL(k^n)$ et pour tout $V \in G_{n,r}$, $u.V = u(V)$, on définit une opération de $GL(K^n)$ sur $G_{n,r}$ et que cette opération est transitive.

6) Déterminer le stabilisateur de $K^r \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ (le singleton $\{0\}$ apparaissant $n - r$ fois).

7) En déduire le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension r de K^n.

8) Retrouver le résultat de 4)a) en considérant l'action naturelle de $GL(K^n)$ sur K^n.

Exercice 9.

Dans l'espace euclidien réel de dimension 3. On considère un cube centré en l'origine dont on note S l'ensemble des sommets. On note G le groupe des isométries de l'espace euclidien laissant stable S et on fait opérer naturellement G sur S.

1) Soit $A \in S$. Etudier le stabilisateur $stab_G(A)$ et déterminer son ordre.

2) Montrer que l'action de G sur S est transitive. Est-elle simplement transitive? Est-elle fidèle?

3) Déterminer l'ordre de G.