Université de Metz

Master 1 de Mathématiques **Année 2009/2010**

TD n° 3. Groupes et géométrie

Sous-groupes de Sylow- Classification

Exercice 1.

On dit qu'un groupe G est simple si ses seuls sous-groupes normaux sont $\{e\}$ et G.
1) Déterminer tous les groupes abéliens simples.
2) Soient p un nombre premier et r un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'un groupe d'ordre p^r n'est jamais simple.
3) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre p^2.
4) Un sous-groupe d'un groupe simple est-il simple?
5) Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 2.

Soit G un groupe fini.

a. Soit $x \in G$ d'ordre $p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ (avec $\alpha_i > 0$ et $p_1, \dots, p_s$ premiers tous distincts). Démontrer qu'il existe $x_1, \dots, x_s$ dans G tels que $x = x_1 \dots x_s$, $o(x_i) = p_i^{\alpha_i}$ et $x_i x_j = x_j x_i$ pour tout (i, j).

b. Montrer que G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow si et seulement si tout sous-groupe de Sylow est normal dans G.

c. Si c'est le cas, montrer que le centre de G n'est pas trivial et que tout diviseur premier de l'ordre de G divise l'ordre de son centre.

Exercice 3:(Extrait de Juin 2000).

Soient G un groupe fini et p un diviseur premier de $|G|$. On suppose que $|G| = p^m n$ avec n non divisible par p. On veut montrer que pour tout $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, il existe un sous-groupe G_l de G d'ordre p^l tel que G_l soit distingué dans G_{l+1}.
1) On suppose que $|G| = p^m$(c'est à dire $n = 1$)
a) Montrer, en utilisant l'équation des classes, que le centre de G n'est pas réduit à $\{e\}$.
b) Démontrer alors le résultat par récurrence sur m.(Appliquer le théorème de Cauchy sur $Z(G)$).
2) Démontrer le résultat dans le cas général.
3) Déduire de ce qui précède le résultat suivant: Si G est un groupe abélien fini et si d est un diviseur de l'ordre de G, alors G contient un sous-groupe d'ordre d.(Utiliser l'exercice précédent)

Exercice 4.

Soit G un groupe d'ordre 15.
1) Déterminer, pour tout diviseur m de l'ordre de G le nombre d'éléments d'ordre m.
2) Déterminer le plus petit entier n tel que S_n contienne un sous-groupe d'ordre 15.

Exercice 5.

Soit $G = \mathbb{Z}/1620\mathbb{Z}$.
1) Déterminer, pour tout diviseur premier p de $o(G)$, tous les p-sous-groupes de Sylow de G.
2) Montrer que G est produit direct des ses sous-goupes de Sylow.
3) Mêmes questions avec $G = (\mathbb{Z}/63\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$.

Exercice 6.(Extrait de Septembre 2000).

Soit G un groupe. Si $x, y \in G$, on appelle commutateur de x et y l'élément noté $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. On appelle sous-groupe des commutateurs ou sous-groupe dérivé, et on note $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x, y]$ pour $x, y \in G$.
1) Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe distingué de G et que c'est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que G/H soit abélien.

Soit $G = A_4$, le sous-groupe de S_4 des permutations de signature 1.
2) Montrer directement que $[G, G]$ contient au moins 3 éléments.
3) Déterminer deux 3-sous-groupes de Sylow de A_4. En déduire leur nombre total.
4) Déterminer le nombre des 2-sous-groupes de Sylow de A_4.
5) Montrer que l'ordre de $[G, G]$ est 4.(Utiliser 1))
6) En déduire que A_4 ne contient pas de sous-groupe d'ordre 6.
7) Déterminer tous les sous-groupes de A_4. Lesquels sont-distingués?
8) Montrer que A_4 est produit semi-direct de deux sous-groupes de Sylow. En est-il le produit direct?

Exercice 7.

Soient G un groupe fini, H un sous groupe de G et p un diviseur premier de l'ordre de H.
a) Montrer que tout p sous-groupe de Sylow de H est l'intersection de H avec un p sous-groupe de Sylow de G.
b) Inveresement, montrer que si H est distingué dans G, et S un p sous-groupe de Sylow de G, alors, $S \cap H$ est un p sous-groupe de Sylow de H et qu'en plus, HS/H est un p sous-groupe de Sylow de G/H.

Exercice 8:(Extrait de Avril 2002).

Tous les groupes d'ordre 255 sont cycliques.
1) Montrer, en regardant les sous-groupes de Sylow, que tous les groupes d'ordre 15, 51 et 85 sont cycliques.
2) Soit G un groupe d'ordre 255.
a) Montrer que le 17-sous-groupe de Sylow de G est normal. On le note H_{17}.
b) Montrer que G admet un sous-groupe d'ordre 3, noté, H_3 et un sous-groupe d'ordre 5, noté, H_5. Montrer que l'un d'eux est un sous-groupe normal de G.
c) En déduire que H_3H_5, H_3H_{17} et H_5H_{17} sont des sous-groupes de G et qu'ils sont cycliques.
d) Montrer $H_3H_5H_{17}$ est un sous-groupe de G. Quel est son ordre?
e) Montrer que $H_3H_5H_{17}$ est abélien, puis conclure.

Exercice 9.

Soit G un groupe d'ordre 48. On veut montrer que G n'est pas simple. Pour tout diviseur premier p de $|G|$, on appelle n_p le nombre des p-sous-groupes de Sylow de G.
1) Montrer que si $n_3 = 1$ ou 16, G n'est pas simple.
2) On suppose que $n_3 = 4$ et soit $X = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ l'ensemble des 3-sous-groupes de Sylow de G. On fait opérer G sur X par conjugaison c'est à dire $g.H_i = gH_ig^{-1}$.
a) Montrer que cette action induit un homomorphisme de groupes de G dans $Bij(X)$.
b) Conclure.

Exercice 10.

1) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 1225.
2) Soit G un groupe d'ordre 30.
a) Montrer que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$. En déduire que G contient un sous-groupe cyclique d'ordre 15.
b) Montrer que G est produit semi-direct de deux sous-groupes cycliques.