Université Paul Verlaine – Metz
Préparation concours 2 (L2, BE)

Année universitaire 2009-2010
A. Pasquale

Dérivées

La dérivée de la fonction $f(x)$ est la limite, si elle existe, du rapport des accroissements $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers zéro. En notant la dérivée de la fonction $f(x)$ par $f'(x)$, on a alors :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \,;$$

Notation aussi utilisée pour $f'(x)$ est $(f(x))'$ ou $\dfrac{df(x)}{dx}$ ou $\dfrac{d}{dx}(f(x))$ ou $Df(x)$.

On dit que la function f est dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ si la dérivée $f'(x)$ existe en tout point $x \in]a,b[$.

Signification géométrique : $f'(x_0)$ est la pente de la tangente au graphe (courbe représentative) de f au point d'abscisse x_0.

Règles et propriétés de base : Soient f et g deux fonctions :

(1) Pour toute constante c on a : $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

(2) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(3) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

(5) $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$ (c'est une conséquence de (4) pour $g(x) = 1$)

(6) $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

(7) Soit $y = f(x)$ inversible d'inverse $x = f^{-1}(y)$. Alors $\big(f^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Dérivées usuelles

Polynômes : $(\text{constante})' = 0\,;\quad x' = 1\,;\quad (x^2)' = 2x\,;\quad (x^3)' = 3x^2$.
En général pour $n = 1, 2, \ldots$ on a : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Fonctions trigonométriques : $(\sin x)' = \cos x\,;\quad (\cos x)' = -\sin x\,;\quad (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Fonctions trigonométriques inverses :
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exponentiels, logarithmes, puissances :
$(e^x)' = e^x\,;\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$ on a : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Pour $a > 0$ on a : $(a^x)' = (\ln a)a^x$ $\quad$ [car $a^x = e^{x \ln a}$]

Pour $a > 0$, $a \neq 1$ on a : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad$ [car $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$]

Cas particulier avec $\alpha = 1/n$ et $n = 1, 2, \cdots$: $\big(\sqrt[n]{x}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Fonctions trigonométriques hyperboliques :
Leur définition : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,;\qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,;\qquad \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

On a : $(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x \qquad (\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Théorème de Rolle : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors la dérivée de f s'annulle en au moins un point de $]a, b[$: il existte au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$.

Inégalités des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$:

(1) S'il existe m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b - a)$.
(2) S'il existe M tels que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ pour tout $x_1, x_2 \in]a, b[$.

Dérivée et sens de variation de f :
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

(1) f est croissante sur $]a, b[$, si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$;
(2) f est décroissante sur $]a, b[$, si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$;
(3) f est constante sur $]a, b[$, si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$;
(4) si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $]a, b[$;
(5) si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $]a, b[$.

Les réciproques de (4) et (5) ne sont pas vraies.
Remarque : Le calcul de la dérivée de f permet donc de déterminer les points extremaux (max et min) de f.

1. Dérivée seconde

La dérivée seconde $f''(x)$ est la dérivée de $f'(x)$.
Le calcul de la dérivée seconde permet de determiner la concavité/convexité d'une fonction :
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable (c-à-d f possède une dérivée seconde sur $]a, b[$). Alors :

(1) f est convexe sur $]a, b[$, si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$;
(2) f est concave sur $]a, b[$, si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

2. Dérivées d'ordre supérieure :

Pour $n = 0, 1, 2, ...$ on pose :

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &:= f(x) \\
f^{(1)}(x) &:= f'(x) \\
f^{(2)}(x) &:= f''(x) \\
&\cdots \\
f^{(n+1)}(x) &:= \left(f^{(n)}(x)\right)'
\end{aligned}
$$