Intégrales impropres

Intégrale sur un intervalle infini. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, c]$ pour tout $c \geq a$. Lorsque l'intégrale $\int_a^c f(x)\, dx$ a une limite finie pour $c \to +\infty$, cette limite définit l'*intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$*, qu'on note $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Dans ce cas, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est *convergente* ; sinon on dit que l'intégrale impropre est *divergente*.

De manière analogue, on peut définir les intégrales impropres $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\, dx$ pour une fonction $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ ainsi que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ pour une fonction $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Exemple : L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En effet, on suppose d'abord que $\alpha \neq 1$. Alors, pour tout $c \geq 1$, on a :

$$\int_1^c x^{-\alpha}\, dx = \Big[\frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big]_1^c = \frac{1}{1-\alpha}\, c^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\,, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{c\to+\infty} \int_1^c x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1\,, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_1^c x^{-1}\, dx = [\ln x]_1^c = \ln c \to +\infty \quad \text{pour } c \to +\infty\,.$$

Intégrale d'une fonction non bornée. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[c, b]$ pour tout $c \in]a, b]$. On suppose que f n'est pas bornée au voisinage de a. Lorsque l'intégrale $\int_c^b f(x)\, dx$ a une limite finie pour $c \to a^-$, cette limite définit l'*intégrale impropre de f sur $[a, b]$*, qu'on note $\int_a^b f(x)\, dx$. Dans ce cas, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\, dx$ est *convergente* ; sinon on dit que l'intégrale impropre est *divergente*.

De manière analogue, on peut définir l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\, dx$ d'une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée au voisinage de b.

Exemple : L'intégrale impropre $\int_0^1 x^{-\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. En effet, on suppose d'abord que $\alpha \neq 1$. Alors, pour tout $0 < c \leq 1$, on a :

$$\int_c^1 x^{-\alpha}\, dx = \Big[\frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big]_c^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\, c^{1-\alpha}\,, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{c\to 0^+} \int_0^1 x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha < 1\,, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1\,. \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_c^1 x^{-1}\, dx = [\ln x]_c^1 = -\ln c \to +\infty \quad \text{pour } c \to 0^+\,.$$

Critères de convergence pour les intégrales impropres. La nature (convergence ou divergence) d'une intégrale impropre peut être étudiée au moyen des critères suivants :

Critère de comparaison : Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrables sur chaque intervalle fini $[a, c]$ avec $c \geq a$ et telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, +\infty[$.
(1) Si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, alors aussi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge ;
(2) si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge, alors aussi $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge.

Un critère analogue est satisfait par les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ de fonctions $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui sont non-bornées en b mais intégrables sur chaque intervalle $[a, c]$ avec $a \leq c < b$ et telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b[$.

Critère de domination : Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrables sur chaque intervalle fini $[a, c]$ avec $c \geq a$. On suppose que $g(x) \geq 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$.
(1) Si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, alors aussi $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge (et donc aussi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge) ;
(2) si $\lambda \neq 0$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, alors aussi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

Un critère analogue est satisfait par les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ de fonctions $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui sont non-bornées en b.