

INTÉGRALES

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On dit qu'une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I lorsque : 1) F est dérivable sur I ; 2) $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Si F est une primitive de f , alors toute primitive de f est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

On dit que f est *intégrable* si elle admet une primitive. Dans ce cas on note $\int f(x) dx$ l'une quelconque des primitives de f , définie à une constante près que l'on écrit toujours explicitement. $\int f(x) dx$ s'appelle l'*intégrale indéfinie* de f .

Soit F une primitive de f sur I et soit $[a; b]$ une partie de I . L'*intégrale (définie) de f sur l'intervalle $[a; b]$* , notée $\int_a^b f(x) dx$, est le nombre réel qui est égale à $F(b) - F(a)$. Donc

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

La différence $F(b) - F(a)$ s'appelle la *variation de F entre a et b* ; elle est aussi notée $[F(x)]_a^b$.

Signification géométrique : . Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire de la surface limitée par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Si f prend des valeurs négatives, l'aire est affectée du signe moins sur les intervalles où $f < 0$.

Propriétés de base : Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$:

- (1) Pour toute constante c on a : $\int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx$
- (2) $\int_a^b [(f(x) + g(x))] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- (3) (Intégration par parties) $\int_a^b [f(x)g'(x)] dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b [f'(x)g(x)] dx$.
- (4) (Changement de variable) $\int_a^b g(f(x))f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy$.
- (5) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- (6) Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$. En particulier :
 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
- (7) Si $c \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- (8) Pour $a < b$ on pose : $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$. Pour tout a : $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Les propriétés (1) à (4) ont des analogues pour l'intégrale indéfinie

Intégrales indéfinies usuelles (C dénotes une constante réelle arbitraire)

Polynômes : $\int 1 dx = x + C$; $\int x dx = \frac{1}{2}x + C$; $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

En général pour $n = 1, 2, \dots$ on a : $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

Fonctions trigonométriques : $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$, $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Fonctions trigonométriques inverses : $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$; $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Exponentiels, logarithmes, puissances :

$\int e^x dx = e^x + C$; $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$; pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$ et $x > 0$ on a : $\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$.

Cas particuliers :

Pour $a > 0, a \neq 1$ on a : $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

Pour $n = 1, 2, \dots$ on a : $\int \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \sqrt[n]{x} + C$

Fonctions trigonométriques hyperboliques :

$\int (\sinh x) dx = \cosh x$; $\int (\cosh x) dx = \sinh x$; $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \int (1 - \tanh^2 x) dx = \tanh x + C$.

Théorème fondamental du calcul intégrale : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

- (1) Si $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors $g'(x) = f(x)$.
- (2) Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.

Intégrales de fonctions symétriques :

Soit f continue sur l'intervalle symétrique $[-a, a]$.

Si f est paire (c-à-d $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Si f est impaire (c-à-d $f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Soit f continue sur \mathbb{R} et périodique de période T . Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Théorème de la valeur moyenne : Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$. La *valeur moyenne* de la fonction continue f sur l'intervalle $[a, b]$ est le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Techniques d'intégration particulières :

Substitution trigonométrique :

Expression	substitution	identité
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$	$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\cos \theta}, 0 \leq \theta < \pi/2$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$	$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

Intégration de fractions rationnelles : (voir exemples du cours)

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes à coefficients réels :

Cas 1 : $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$. On applique l'algorithme de division pour obtenir une fonction du type $A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ avec $A(x), R(x)$ polynômes et $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Ensuite on applique le cas 2.

Cas 2 : $\deg P(x) < \deg Q(x)$. On décompose le polynôme $Q(x)$ en polynômes irréductibles :

$$Q(x) = a(x - r_1)^{m_1} \dots (x - r_p)^{m_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{n_1} \dots (x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$$

où $a, r_1, \dots, r_p, b_1, c_1, \dots, b_q, c_q \in \mathbb{R}$ et $m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q$ sont des entiers positifs. Chacun des polynômes $x^2 + b_jx + c_j$ dans cette décomposition est sans racine réelle, c-à-d $\Delta := b_j^2 - 4c_j < 0$. On écrit $P(x)/Q(x)$ dans la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(x - r_i)^k} + \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{n_j} \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + b_jx + c_j)^l}$$

Le problème est donc réduit à calculer des intégrales du type : $\int \frac{dx}{(x - r)^k}$ et $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} dx$.

On a : $\int \frac{dx}{(x - r)^k} = \begin{cases} \frac{(x - r)^{-k+1}}{-k + 1} + \text{constant} & \text{si } k \neq 1 \\ \ln|x - r| + \text{constant} & \text{si } k = 1 \end{cases}$. En outre, on cherche $C, D \in \mathbb{R}$ tels

que : $\frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} = C \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} + \frac{D}{(x^2 + bx + c)^k}$. On calcule $\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx$ par substitution (c'est une intégrale de la forme $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k} dx$). Pour $\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^k} dx$, on écrit d'abord par substitution l'intégrale dans la forme $\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k}$, puis on résout cette dernière intégrale par substitution trigonométrique $t = \tan \theta$.