Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2010-2011
Algèbre 2 (L2)

Feuille de TD n^0 1 : Espaces vectoriels

Exercice 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$?

(a) $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : 2x - y + z = 0\}$

(b) $E_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x + y = x - z = 0\}$

(c) $E_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x + y + z = 1\}$

Exercice 2 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

(a) l'ensemble des fonctions continues,

(b) l'ensemble des fonctions dérivables,

(c) l'ensembles des fonctions paires,

(d) l'ensemble des fonctions monotones,

(e) l'ensemble des fonctions bornées,

(f) $\{f \in \mathcal{F} : \text{la limite } \lim_{x\to 0} f(x) \text{ existe}\}$,

(g) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$

(h) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$

(i) $\{f \in \mathcal{F} : f(x^2) = (f(x))^2\}$

Exercice 3 Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $n \times n$ à coefficients réel. Parmi les sous-ensembles suivants de $M_n(\mathbb{R})$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

(a) les matrices inversibles,

(b) les matrices non inversibles,

(c) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ où $B \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée.

Exercice 4 (a) Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ considéré comme espace vectoriel réel.

(b) On pose $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{Z}_2)^3$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_2$.

Exercice 5 Déterminer si les vecteurs suivants sont linéarment indépendants dans les espaces vectoriels E indiqués.

(a) $\overrightarrow{v_1} = (-2, 3, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, -2)$, $\overrightarrow{v_3} = (2, 1, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$,

(b) $\overrightarrow{v_1} = (1, i, 2 + i)$, $\overrightarrow{v_2} = (i, 1, 2 - i)$, $\overrightarrow{v_3} = (2i, 0, -1 - i)$ dans $E = \mathbb{C}^3$,

(c) $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1, 0, 0, 1)$ dans $E = (\mathbb{Z}_2)^4$,

(d) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans $E = M_2(\mathbb{R})$ (=l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 à coefficients réels).

Pour chacun des cas ci-dessus, determiner une base de $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right)$ et compléter cette base en une base de E.

Exercice 6 Soient $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ et $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Déterminer si f,g et h sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes dans la variable x à coefficients réels de degré ≤ 3

(a) Montrer que $\{x^3+1, x^2-x, x-1, x^2+1, 1\}$ est une famille generatrice de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ contenue dans cette famille.

(c) Déterminer les composantes du polynome $2x^3 + x^2$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et soient $E = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ et $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\,, \qquad & \overrightarrow{u_2} &= -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{v_1} &= 2\overrightarrow{e_1} + 8\overrightarrow{e_2}\,, \qquad & \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}\,. \end{aligned}$$

Determiner la dimension de E, F, $E+F$ et $E \cap F$.