

Feuille de TD n° 2 : Applications linéaires

Exercice 1 Parmi les applications suivantes déterminer lesquelles sont linéaires sur \mathbb{R} . Pour chacune de celles-ci, déterminer son noyau et son image. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{ll}
 f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto -x^2, \\
 f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) \mapsto (-y, x + 2y), \\
 f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & z \mapsto \bar{z}z \\
 f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto 2x + 3y + 1, \\
 f_9 : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}, & p(x) \mapsto p(0), \\
 f_{11} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R}), & A \mapsto A + A^t, \\
 f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto 2x + 1, \\
 f_4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & z \mapsto \bar{z}, \\
 f_6 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & z \mapsto 2\bar{z} + 1, \\
 f_8 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y, z) \mapsto (x + y, z), \\
 f_{10} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, & A \mapsto \text{trace}(A), \\
 & \text{où } A^t \text{ dénote la transposée de } A
 \end{array}$$

Est-ce que les applications f_4 , f_5 et f_6 sont linéaires sur \mathbb{C} ?

Exercice 2 Soit $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ la dérivation de polynômes, définie par $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$. Montrer que D est linéaire, surjective, mais pas injective.

Exercice 3 Soient E , F et G trois espaces vectoriels sur le même corps commutatif \mathbb{K} et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires.

- Montrer que la composée $g \circ f$ est une application linéaire.
- On suppose que f est bijective (donc un isomorphisme). Montrer que f^{-1} est une application linéaire.
- Déduire de ce qui précède que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel E muni de la loi de composition d'applications est un groupe.
- Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ g)$ et que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f((1, 1)) = (1, 0, -2)$ et $f((1, 2)) = (0, 1, -1)$.

- Déterminer $f((4, 6))$.
- Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 5 Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension 3 et 4, respectivement. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\}$ une base de F . On considère l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ dont la matrice associée dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Déterminer des bases pour le noyau et pour l'image de f .

Exercice 6 (a) Soient E un espace vectoriel réel et soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . Soit λ un réel. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\varphi_\lambda(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \varphi_\lambda(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \varphi_\lambda(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3.$$

Pour quelles valeurs de λ , φ_λ est-elle injective? Surjective? Bijective?

(b) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps commutatif \mathbb{K} . Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E et soit $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$ une famille d'éléments de F .

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $f(\vec{e}_j) = \vec{\varepsilon}_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

2) Montrer que si $\dim E = \dim F$ et si \mathcal{C} est une base de F , alors l'application f est un isomorphisme.

(c) Soient $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Montrer que les espaces vectoriels $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ sont isomorphes. Exhiber un isomorphisme de E sur F .

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'application linéaire (sur \mathbb{C}) dont la matrice associée dans les bases canoniques est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$.

(b) Déterminer l'image sous f de l'hyperplane H de \mathbb{C}^4 engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 2, 1, 0)$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice associée aux bases canoniques est

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer $f((1, 2, 3))$ et $f((x_1, x_2, x_3))$.

(b) Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases

$$\mathcal{B} = \{2e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{e_3, e_1, e_2\}.$$

Exercice 9 Le systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ y_2 = - x_3 + 2x_4 \\ y_3 = bx_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases}$$

décrit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ donnée par rapport aux bases canoniques. Ici a et b sont des paramètres réels.

(a) Déterminer les valeurs de a et b afin que $\dim \text{Ker}(f) = 2$.

(b) Pour les valeurs de a et b déterminées en (a), donner des bases de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.