Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2010-2011
Algèbre 2 (L2)

Feuille de TD n^0 3 : Sommes et sommes directes

Exercice 1 (a) Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(0,1,1,0)$ et $(1,1,1,1)$. Ce supplémentaire est-il unique ?

(b) On considère les deux sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,1)) \qquad \text{and} \qquad G = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,1,0))\,.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

(c) Est-ce que la relation $E = F \oplus G$ est encore valable si $E = (\mathbb{Z}_2)^3$?

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}_4[x]$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \mathrm{Vect}(1 - x + x^4)\,, \quad F = \mathrm{Vect}(1, x^3)\,, \quad G = \mathrm{Vect}(x, x + x^3)\,.$$

Déterminer la dimension et une base de $F + G + H$. Est-ce que F,G et H sont en somme directe ?

Exercice 3 Soient $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

(b) Même question pour l'ensemble $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.

(d) Donné la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, écrire A en tant que somme d'un élément de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément de $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. On considère le plan vectoriel $F = \{\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 : -z + 2y - 2x = 0\}$ et la droite R engendrée par le vecteur $\vec{e}_2$.

(a) Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection vectorielle sur F parallèlement à R.

(b) Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la symétrie vectorielle sur F parallèlement à R.

Exercice 5 Soient $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 = (0,0,1,1)$ et $\vec{u}_2 = (1,1,0,0)$.

(a) Déterminer la dimension et une base de F.

(b) Vérifier que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

(c) Écrire la matrice de la symétrie vectorielle sur F parallélement à G dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ où $\vec{u}_3 = (1,0,0,0)$ et $\vec{u}_4 = (0,0,0,3)$.