Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2010-2011
Algèbre linéaire 2 (L2)

Feuille de TD n^0 4 : Espace dual.

Exercice 1 On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_1(\overrightarrow{x}) = x_1 + x_2 + 2x_3\,, \qquad \varphi_2(\overrightarrow{x}) = x_1 - x_2 + x_3\,, \qquad \varphi_3(\overrightarrow{x}) = x_1 + x_2 - x_3\,.$$

Forment-elles une base de l'espace dual de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Déterminer la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\varphi(1,0,1) = 1, \qquad \varphi(1,1,1) = 1\,, \qquad \varphi(1,-1,0) = -1\,.$$

Donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 3 On considère la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ où

$$\overrightarrow{e}_1 = (1,1,1)^t\,, \quad \overrightarrow{e}_2 = (0,0,1)^t\,, \quad \overrightarrow{e}_3 = (1,0,1)^t\,.$$

Déterminer la base de $(\mathbb{C}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. On note respectivement $f^t : F^* \to E^*$ et $g^t : G^* \to F^*$ leurs transposées. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$,

(b) Si f est bijective, alors aussi f^t est bijective, et $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$.

Exercice 5 Déterminer l'orthogonal pour la dualité F^0 du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,0,2,1)^t\,, \qquad \overrightarrow{v}_2 = (0,1,0,1)^t\,, \qquad \overrightarrow{v}_3 = (1,3,0,-1)^t\,.$$

Exercice 6 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

(a) Montrer que $(\mathrm{Im}\, f)^0 = \mathrm{Ker}(f^t)$.

(b) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^t)$.

(c) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$ pour toute matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.