Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2010-2011
Algèbre Linéaire 2 (L2)

Feuille de TD n^0 5 : Déterminants.

Exercice 1 On considère les permuations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 2 & 7 & 1 & 10 & 5 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_{10}$$
$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

(a) Décomposer les permutations ci-dessus en cycles disjoints.

(b) Donner pour chacune des permutations une decomposition en tant que produit de transpositions et en calculer la signature.

Exercice 2 En utilisant la définition, calculer le déterminant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui est triangulaire supérieure, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Exercice 3 (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \\ 2007 & 2008 & 2009 \end{pmatrix}.$$

(b) Lesquelles parmi les matrices ci-dessus sont inversibles ?

(c) Calculer, si possible, la comatrice et l'inverse des matrices A et B.

Exercice 4 Soit n un entier ≥ 2 et soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer directement $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.

(b) En développant le déterminant de A_n selon la dernière ligne, montrer que $\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ for $n \geq 3$.

(c) Déduire de ce qui précède que $\det(A_n) = n+1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 5 (a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramétre reél α le système d'équations linéaires suivant est-t-il de Cramer ?

$$\begin{cases} x_1 + & \alpha x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 + & x_2 & -\alpha x_3 & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

(b) Résoudre le système ci-dessus pour les valeurs de α déterminées dans (a).

Exercice 6 Déterminer si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = (1,2,1)\,, \qquad \vec{v}_2 = (3,0,-1)\,, \qquad \vec{v}_3 = (2,1,3)$$

est libre en utilisant la notion de déterminant.

Exercice 7 Déterminer selon les valeurs du nombre réel α le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & 0 \\ \alpha^2-1 & 0 & 4-\alpha \\ 1 & 2\alpha-3 & 0 \end{pmatrix}.$$