Feuille de TD n^0 6 : Réduction d'endomorphismes.

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le spectre de A sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer, si possible, une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 2 (a) Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par $f(x, y) = (x, \alpha x + y)$ est-il diagonalisable ?

(b) Déterminer le polynôme minimal de f en fonction de α.

Exercice 3 (Extrait du partiel du 11 janvier 2010) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (x - y, -x + y, x + y + 2z) .$$

(a) Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le polynôme caracteristique de f. Déterminer les valeurs propres de f et leurs multeplicités algébriques.

(c) Étudier si f est diagonalisable.

(d) Si f est diagonalisable, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f.

(e) Déterminer, si possible, une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

(f) Calculer le polynôme minimal de f.