Examen du 3 janvier 2011
Durée : 2 heures

Questions de cours [**2 points**]

1. Donner la définition de valeur propre et vecteur propre d'une application linéaire.

2. Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Exercice 1. [**5 points**]

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\},$$
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_2 + x_4 = 0\}.$$

(a) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

(b) Soient p_F et p_G respectivement les projections vectorielles sur F et G, respectivement, par rapport à la décomposition $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $p_F(\vec{u})$ et $p_G(\vec{u})$ si $\vec{u} = (0, 1, 1, 1)$.

Exercice 2. [**5 points**]

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour toutes matrices $A, B \in E$ on pose $\varphi_A(B) = \mathrm{trace}(AB)$.

(a) Soit $A \in E$ fixée. Montrer que $\varphi_A \in E^*$.

(b) Montrer que l'application $\varphi : E \to E^*$ donnée par $\varphi(A) = \varphi_A$ est linéaire.

(c) Calculer $\varphi_A(A^t)$ où A^t dénote la transposée de la matrice A.

(d) Déduire de (c) que φ est injective.

(e) Conclure que φ est un isomorphisme.

Exercice 3. [**4 points**]

Soit $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients réels et soit

$$f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$$

l'application linéaire définie par

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a - b)x^3 + (b - c)x^2 + (a - c)x + d\,.$$

(a) Déterminer la dimension et une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

(b) Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\mathbb{R}_3[x]$

Exercice 4. [**9 points**]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0)\,, \qquad \vec{v}_2 = (0, 1, 1)\,, \qquad \vec{v}_3 = (0, 0, 1)\,,$$

sont vecteurs propres de valeurs propres respectivement $1, 1, 2$.

(a) Montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est diagonalisable.

(b) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Est-ce que f est un isomorphisme ? Justifiez votre réponse.

(d) Ecrire le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

(e) Déterminer une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ est diagonale. Utiliser B pour calculer A^7.