Partiel du 8 novembre 2010
Durée : 2 heures

Questions de cours [2 points]

1. Enoncer le théorème du rang.

2. Soit E un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et soit $f \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que si f est inversible, alors $f^{-1} \in \operatorname{End}(E)$.

Exercice 1. [3 points]

On considère les bases $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. [6 points]

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[x]$ définis comme suit :

$$E = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x] : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ 2a - b + c = a + b - d = 0\}$$
$$F = \operatorname{Vect}\{p(x), q(x)\}$$

où $p(x) = x + 1$ et $q(x) = x^3 + x^2$. Déterminer la dimension et une base pour E, $E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 3. [5 points]

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $A \in M_2(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A. Soit $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(A) = A - 2A^T$.

(a) Montrer que f est une application linéaire

(b) Déterminer la dimension du noyau $\operatorname{Ker}(f)$ de f.

(c) Déduire de (b) la dimension de l'image $\operatorname{Im}(f)$ de f.

(d) La trace $\operatorname{tr}(A)$ de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est définie par $\operatorname{tr}(A) = a + d$. Soit $E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension et une base de E.

Exercice 4. [6 points]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ bases de E et F, respectivement. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications linéaires de matrices respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que $g \circ f$ est l'endomorphisme nul de E et que $f \circ g$ est l'endomorphisme nul de F.

(b) Déduire de (a) que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

(c) Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$.

(d) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(g)$ et la compléter en une base de E.