Université de Metz

Master 1 de Mathématiques **Année 2010/2011**

TD n° 1. Algèbre et géométrie

Exercice 1. Révisions Compléments

Soit $(G,.)$ un groupe.

a. Soit x un élément de G d'ordre n. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $y = x^m$. Montrer que y est d'ordre fini et déterminer son ordre.

b. Soient x et y deux éléments de G, tels que $o(x) = r$, $o(y) = s$ et $xy = yx$. Montrer que xy est d'ordre fini et calculer $o(xy)$ lorsque r et s sont premiers entre eux.

c. **<u>Attention</u>**: Dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Quels sont les ordres de A et de B ?

2) Quel est l'ordre de AB? Qu'en déduit-on?

d.* Plus généralement, Si $xy = yx$, montrer qu'il existe dans le sous-groupe engendré par x et y un élément d'ordre $pppcm(o(x), o(y))$.

e. Soit G' un autre groupe. Si x (resp x') est un élément d'ordre fini de G (resp de G'), quel est l'ordre de (x, x') dans le groupe $G \times G'$?

f. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un monomorphisme de groupes. Montrer que f conserve l'ordre des éléments. A-t-on la réciproque? Qu'en est-il si f est juste un morphisme?

g. Montrer que deux éléments conjugués ont même ordre et que pour tous les éléments x et y de G, xy et yx ont même ordre.

Exercice 2. Révisions Compléments

Soient G_1, G_2 deux groupes et f un épimorphisme de groupes de G_1 dans G_2.

a) On suppose que G_1 est d'ordre fini. Montrer que G_2 est d'ordre fini et que $o(G_2)$ divise $o(G_1)$.

b) On suppose que G_1 et G_2 sont finis et soit K un sous-groupe de G_2. Montrer que $K = f(f^{-1}(K))$ et que $o(f^{-1}(K)) = o(K)o(\ker f)$.

c) Si f est juste un morphisme de groupes et H un sous-groupe de G_1, determiner $f^{-1}(f(H))$.

d) Si f est un isomorphisme et H_1 un sous groupe normal de G_1, on pose $H_2 = f(H_1)$. Montrer que f induit un isomorphisme de groupes de $G_1/_{H_1}$ dans $G_2/_{H_2}$.

Exercice 3. Révisions Compléments

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,.)$, on pose $HK = \{hk \,;\, (h,k) \in H \times K\}$.

1. On suppose H et K finis ; démontrer que $\mathrm{card}(HK) = \dfrac{\mathrm{card}(H)\mathrm{card}(K)}{\mathrm{card}(H \cap K)}$. En déduire que HK et KH ont le même cardinal.

2. a. montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
b. Montrer que si tel est le cas, $HK = < H \cup K >$.
c. Montrer que si H (ou K) est normal dans G, alors HK est un sous-groupe de G.
3. Soit $\phi : H \times K \longrightarrow G$ l'application définie par $\phi(h,k) = hk$. A quelles conditions ϕ est-il un homomorphisme, un homomorphisme injectif ? Si ϕ est un isomorphisme, on dit que G est produit direct de H et K.
4. Si G est produit direct de H et K, démontrer que H et K sont normaux dans G.
5. On considère sur G la relation

$$\forall x, y \in G, \quad x \equiv y \Longleftrightarrow x \in KyH$$

a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.(dont les classes d'équivalence s'appellent les doubles classes de G modulo (H, K))
b) Si H et K sont finis, déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence.

Exercice 4.

Soit G un groupe .
a) On appelle sous-groupe dérivé de G, et on note $D(G)$, le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, appelés commutateurs de x et y pour $x, y \in G$. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que c'est le plus petit sous-groupe H de G distingué tel que G/H est abélien.
b) Que vaut $D(G)$ si G est simple?

Exercice 5.

Soient $n \geq 3$ et $\gamma_r = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_r)$ un cycle de longueur r de S_n.
a. Démontrer que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \ldots\ \sigma(i_r))$. Déterminer le centre de S_n. Montrer que deux r-cycles de S_n sont conjugués dans S_n.
b. Démontrer que pour tout $(j, k) \in \{2, \ldots, n\}^2$ $j \neq k$, on a $(j\ k) = (1\ j)(1\ k)(1\ j)$ puis, si $k - j > 1$, $(j\ k) = (k-1\ k)(j\ k-1)(k-1\ k)$.
c. Démontrer que S_n est engendré par
(i) les $(n-1)$ transpositions $(1\ i)$ $(2 \leq i \leq n)$
(ii) les $(n-1)$ transpositions $(i\ i+1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$
(iii) les 2 permutations $\gamma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$

Exercice 6.

1) Montrer que dans le groupe symétrique S_n deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont les mêmes longueurs des cycles dans leur décomposition en produits de cycles disjoints.
2) On appelle partition de l'entier n toute suite finie décroissante d'entiers dont la somme est égale à n. Montrer que le nombre de partitions de l'entier n est égal au nombre de classes de conjugaisons de S_n.
3) Déterminer tous les morphismes de groupes de S_n à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
4) Qu'en est-il si on repmplace S_n par A_n dans 3)?(on pourra considérer le cas $n = 3$ et le cas $n \geq 5$)

Exercice 7.

Soient $n \in \mathbf{N}$ $(n \geq 5)$, S_n le groupe symétrique et A_n le groupe alterné.

a) Démontrer que deux 3-cycles de A_n sont conjugués dans A_n.
b) Si σ est un 3-cycle, démontrer qu'il existe $s \in A_n$ tel que $\sigma = \sigma^{-1} \circ s^{-1} \circ \sigma \circ s$. En déduire que A_n est le sous-groupe des commutateurs (sous-groupe dérivé) de A_n est S_n .
c) Quel est le sous-groupe dérivé de A_n?
d) On suppose que $n \geq 2$. Déterminer le centre de A_n.

Exercice 8.

Montrer qu'il n'existe pas de morphisme surjectif de S_n dans A_n pour $n \geq 3$. En déduire que S_n n'est pas produit direct de A_n par un autre sous-groupe.

Exercice 9.

Soient $n \geq 3$ un entier et ϕ un automorphisme de S_n qui transforme une transposition en une transposition. On veut montrer que ϕ est un automorphisme intérieur, ce qui signifie qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que

$$\forall \gamma \in S_n,\ \phi(\gamma) = \sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$$

1. Montrer qu'il existe trois éléments distincts $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\phi((12)) = (a_1 a_2)$ et $\phi((13)) = (a_1 a_3)$. En déduire que $\phi((23)) = (a_2 a_3)$.
2. Si $n > 3$, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $i > 3$. Montrer qu'il existe $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\phi((1i)) = (a_1 a_i)$.
3. Montrer que l'élément σ défini par: $\sigma(k) := a_k,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, appartient à S_n.
4. Montrer que $\phi((kl)) = (a_k a_l),\ \forall k, l \in \{1, \ldots, n\}$. En déduire que:

$$\phi((kl)) = \sigma \circ (kl) \circ \sigma^{-1},\ \forall k, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

5. Conclure.
6. Montrer que tout automorphisme de S_3 est intérieur.