Université de Metz

Master 1 de Mathématiques **Année 2010/2011**

TD n° 2. Algèbre et géométrie. Actions. Théorèmes de Sylow.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère le polygone régulier P_n à n côtés de sommets $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ tel que le sommet $A_0 = (1, 0)$. On appelle groupe des isométries de P_n le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui conserve le polygone P_n. On le note D'_n. Déterminer l'ordre de D'_n . Montrer qu'il est isomorphe au groupe diédral D_n.

Exercice 2.

1) Montrer que deux n-cycles sont conjugués dans S_n. En déduire le stabilisateur d'un n-cycle dans l'action par conjugaison de S_n sur lui même.
2) On suppose que n est impair. Montrer que les n-cycles sont dans A_n et qu'ils forment (dans A_n) deux classes de conjugaison.
3) On suppose dans la suite de l'exercice que $n = 5$ et on considère un 5-cycle c. Montrer que c et c^2 représentent les deux classes de conjugaisons des 5-cycles dans A_5.
4) Déterminer toutes les classes de conjugaison de $\mathbb{A}_5$ et leur cardinal.
5) Déduire de ce qui précède que A_5 est simple.

Exercice 3.

Dans l'espace euclidien réel de dimension 3. On considère un octaèdre centré en l'origine dont on note S l'ensemble des sommets. On note G le groupe des isométries de l'espace euclidien laissant stable S et on fait opérer naturellement G sur S.

1) Soit $A \in S$. Etudier le stabilisateur $stab_G(A)$ et déterminer son ordre.

2) Montrer que l'action de G sur S est transitive. Est-elle simplement transitive? Est-elle fidèle?

3) Déterminer l'ordre de G.

Exercice 4. (Extrait de Novembre 2009)

Soient K un corps commutatif fini d'ordre q et n un entier non nul. On considère le groupe linéaire $G = GL(K^n)$ formé par les matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans K. On veut déterminer l'ordre de G.

1) Montrer qu'en posant pour $u \in G$ et X un vecteur(colonne) non nul de K^n, $u.X = uX$ (le produit de la matrice u par le vecteur colonne X), on définit une action de G sur $K^n \setminus \{0\}$ et que cette action est transitive. (On pourra utiliser le théorème de la base incomplète)

2) Soit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Déterminer l'ordre du stabilisateur de e_1 en fonction de q, n et de l'ordre de $GL(K^{n-1})$.

3) En déduire l'ordre de G.

4) Déterminer l'ordre du sous-groupe de G formé par les matrices de déterminant 1.

Exercice 5.

Soient p un nombre premier ($p \geq 3$) et $(G, .)$ un groupe d'ordre $p+1$. On suppose qu'il existe un automorphisme σ de G d'ordre p.

a. Démontrer que la restriction β de σ à $E = G \setminus \{e\}$ est un cycle d'ordre p.

b Soit $\varphi : < \sigma > \times E \longrightarrow E$ l'application définie par $\varphi(\sigma^k, x) = \sigma^k(x)$. Démontrer que φ est une opération transitive.

c. Démontrer qu'il existe dans G un élément d'ordre 2 puis que tous les éléments de E sont d'ordre 2 . En déduire que G est commutatif .

Exercice 6.

1) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 1225.
2) Soit G un groupe d'ordre 30.
a) Montrer que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$. En déduire que G contient un sous-groupe cyclique d'ordre 15.
b) Montrer que G est produit semi-direct de deux sous-groupes cycliques.

Exercice 7. (Extrait de juin 2010)

Soit G un groupe d'ordre $2pq$ où p et q sont premiers et $2 < p < q$. I) Montrer que si $q+1 \neq 2p$, alors un q-sous-groupe de Sylow de G est distingué dans G.
II) On suppose par la suite que $q+1 = 2p$. Soit H un p-sous-groupe de Sylow de G et K un q-sous-groupe de Sylow de G.
(a) Montrer qu'au moins l'un entre eux est distingué dans G.
(b) Montrer que HK est un sous-groupe de G. Déterminer son ordre.
(c) Montrer que HK est un sous-groupe cyclique de G.
(d) Déduire de ce qui précède que HK est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 8.

1) Déterminer les sous-groupes de Sylow de S_3 et S_4.
2) Lesquels sont distingués?
3) Soit G un groupe fini non simple. Existe-t-il un sous groupe de Sylow qui soit normal?

Exercice 9.

1) Déterminer tous les groupes abéliens simples.
2) Soient p un nombre premier et r un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'un groupe d'ordre p^r n'est jamais simple.
3) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre p^2.
4) Un sous-groupe d'un groupe simple est-il simple?
5) Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 10.

Soient $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $GL_2(\mathbb{F}_3)$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathcal{M}(\mathbb{F}_3)$.
1) Déterminer le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_3)$.
2) Démontrer que $SL_2(\mathbb{F}_3) = \{M \in GL_2(\mathbb{F}_3) \mid \det M = 1\}$ est un sous-groupe normal de $GL_2(\mathbb{F}_3)$.
3) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer $o(A)$ et $o(B)$.
b) Démontrer que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ possède quatre 3-sous-groupes de Sylow.
c) Démontrer qu'il existe dans $SL_2(\mathbb{F}_3)$ au moins huit éléments d'ordre 6. En déduire qu'il n'y a dans $SL_2(\mathbb{F}_3)$ qu'un seul 2-sous-groupe de Sylow.