

Feuille de TD n° 1 : Séries

Exercice 1 Déterminer si possible la somme des séries suivantes :

(a) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} [2(0,1)^n + (0,3)^{n+1}]$

Exercice 2 Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$

Exercice 3 Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 4 1. Comparer les séries suivantes avec l'intégrale de fonctions opportunes et en déduire la convergence :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. Déduire la convergence de la série dans (b) à partir de celle de la série dans (a).

Exercice 5 Sachant que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, déterminer la nature des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$.

Exercice 6 Déterminer la nature des séries de terme général a_n égal à :

(a) $\frac{n^3}{3^n}$ (b) $n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

(c) $\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^n$ (d) $\frac{3^n}{5^n+n}$

(e) $\frac{n^n}{n!}$ (f) $\frac{2^n}{n!}$