Université Paul Verlaine – Metz | Année universitaire 2010-2011
Préparation concours 2 (L2, BE)

Feuille de TD n^0 2 : Espaces vectoriels

Exercice 1 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni des opérations d'addition et multiplication par nombres réels définies comme suit :

La somme $f+g$ des fonctions $f, g \in F$ est la fonction $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Le produit af de la fonction $f \in F$ et du nombre réel a est la fonction $af : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(af)(x) = af(x)$.

Vérifier que F, muni des opérations ci-dessus, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Déterminer si chacun des ensembles F listés ci-dessous est un sous-espace vectoriel de E :

(a) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R},\ 2x - y = z\}$
(b) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R},\ 2x - y = z + 1\}$
(c) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, xy = 0\}$
(d) $E = \mathbb{R}^4, \quad F = \{(x, x, x, x) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
(e) $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\quad F$ l'ensemble des matrices 2×2 de trace nulle.
(f) $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})\,,\quad F$ l'ensemble des matrices 2×2 de déterminant nul.
(g) $E = \mathbb{R}_3[x]\,,\quad F = \mathbb{R}_2[x]$
(h) $E = \mathbb{R}_3[x]\,,\quad F = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 1\}$
(i) $E = \mathbb{R}_3[x]\,,\quad F = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}$

Exercice 3 On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 2),\ \vec{u}_2 = (2, -1, 3),\ \vec{u}_3 = (3, 0, 1)\,; \vec{u}_4 = (1, 1, 1)\,.$$

(a) Établir si les familles suivantes sont libres ou bien liées :

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\,, \mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}\,, \mathcal{B}_3 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}\,.$$

(b) Exprimez si possible le vecteur $\vec{u}_4$ en tant que combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et en tant que combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

(c) Soit $F = \mathrm{Vect}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Déterminer la dimension de F, G, $F + G$ et $F \cap G$. Déterminer une base de $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$\vec{u} = (2, 0, 1, 0), \quad \vec{v} = (-1, 1, 0, 1), \quad \vec{w} = (0, 3, -1, -1)$$
$$\vec{r} = (-1, 1, 5, 4), \quad \vec{s} = (0, 3, -2, 1), \quad \vec{t} = (2, 7, -16, -5)\,.$$

et les sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\,\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\,, \qquad G = \mathrm{Vect}\,\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}\,.$$

(a) Vérifier que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de F.

(b) Déterminer pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{a} = (5, -h, 1, h)$ appartient à F. Pour ces valeurs de h, écrire $\vec{a}$ en tant que combinaison linaire des éléments de $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^4$ tel que $G \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5 Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 2t = 0\},$$
$$G = \text{Vect}\,\{(1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5))\}.$$

(a) Déterminer la dimension et une base de F et de G.

(b) Déterminer la dimension et une base de $F + G$ et de $F \cap G$.

(c) Est-ce que le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ appartient à F+G ?