

### Feuille de TD n<sup>o</sup> 4 : Applications linéaires

**Exercice 1** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application donnée par

$$f(x, y) = (x + y, 2x, x - y).$$

- (a) Vérifier que  $f$  est une application linéaire.
- (b) Déterminer le noyau  $\text{Ker } f$  et l'image  $\text{Im } f$  de l'application  $f$ .
- (c) Est-ce que  $f$  est injective? Surjective?
- (d) Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$
- (e) Vérifier que

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$$

et

$$\mathcal{C} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, -1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$$

sont bases de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , respectivement.

- (f) Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .
- (g) Est-ce que  $(3, 4, 1) \in \text{Im } f$ ?

**Exercice 2** Soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image sous  $f$  du plan  $\pi$  d'équation  $x + 2y = 0$ .