Par la suite, on utilise la notation introduite dans la feuille “Quelques notions de probablité”.

1. Lois associées à une variable aléatoire réelle discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite *discrète* si l'image $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou bien infini dénombrable. Si $X(\Omega)$ est une partie finie, on parle de *variable aléatoire réelle discrète finie* ; sinon, on parle de *variable aléatoire réelle discrète infinie.*

On note $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$ où I est une partie de l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des nombres naturels.

On montre que X est une variable aléatoire discrète si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $[X = x_i] \in \mathcal{T}$. Ici on rappelle la notation $[X = a]$ pour la partie $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ de X.

La famille $\{[X = x_i]\}_{i \in I}$ forme une partition de Ω, c'est-à-dire satisfait les propriétés suivantes :

(1) Pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \emptyset$
(2) $X = \cup_{i \in I} [X = x_i]$.

Elle est appelée le *système complet d'événements associé* à X.

On rappelle les définitions suivantes :

- *l'espérance de* X est définie par $E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i])$.
- *la variance de* X est définie par $V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P([X = x_i])$

Dans le cas de variables discrètes aléatoires réelles infinies, on démande la convergence absolue des séries ci-dessus.
On montre (théorème de Koenig-Huygens) que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, avec $E(X^2) = \sum_i x_i^2 P([X = x_i])$.

Soient maintenant $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de système complet d'événements $\{[X = x_i]\}_{i \in I}$. La *loi de probabilité* ou *distribution*, de X est l'application $P_X : X(\Omega) \to [0, 1]$ définie par $P_X(x_i) = P([X = x_i])$.
On remarque (d'après la définition de probabilité P) que $\sum_{i \in I} P_X(x_i) = \sum_{i \in I} P([X = x_i]) = 1$.

Exemple 1 : On note $[[1, n]]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète X suit une *loi uniforme sur* $[[1, n]]$ si $X(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $j = 1, \dots, n$ on a $P([X = j]) = 1/n$.
L'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12} .$$

Exemple 2 : Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète X suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P([X = 1]) = p$ (et donc $P([X = 0]) = 1 - p$).
L'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1 - p) .$$

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ et $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète X suit la *loi binomiale de paramètre* (n, p) si $X(\Omega) = [[0, n]]$ et pour tout $j = 1, \dots, n$ on a $P([X = j]) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$.
Ici, le coefficient binomial $\binom{n}{j}$ est défini par $\frac{n!}{j!(n-j)!}$ avec $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
L'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq .$$

2. Lois associées à un couple de variables aléatoires réelles discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un *couple de variables aléatoires discrètes* est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$ on a $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, où X et Y sont des variables aléatoires reélles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On écrira $Z = (X, Y)$.

Par la suite, X et Y dénotent deux variables aléatoires discrètes définies sur le meme espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On note $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j : j \in J\}$ où I et J sont deux parties de $\mathbb{N}$. La famille $\{[X = x_i] \cap [X = x_j]\}_{(i,j) \in I \times J}$ forme une partition de Ω, appelée le *système complet d'événements associé* au couple (X, Y).

L'application $P_{(X,Y)} : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0, 1]$ définie par

$$P_{(X,Y)}(x_i, y_j) = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

s'appelle *loi du couple (X,Y)* ou *loi conjointe de X et Y*.

La loi P_X de X est dite *première loi marginale* du couple et la loi P_Y de Y est dite *deuxième loi marginale* du couple.

Les égalités suivantes permettent d'obtenir les lois marginales P_X et P_Y à partir de $P_{(X,Y)}$:

- Pour tout $i \in I$ on a $P([X = x_i]) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$
- Pour tout $j \in J$ on a $P([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$

Ces deux égalités sont une conséquence immediate du fait que $\{[X = x_i] \cap [Y = y_j]\}_{(j \in J}$ est une partition de $[X = x_i]$ et que $\{[X = x_i] \cap [Y = y_j]\}_{(i \in I}$ est une partition de $[Y = y_j]$.

Supposons que $x \in X(\Omega)$ et $P([X = x]) \neq 0$. La *loi conditionnelle à* $[X = x]$ *de* Y est l'application $P_{[X=x]} : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$P_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P([X = x])}.$$

De même, supposons que $y \in Y(\Omega)$ et $P([Y = y]) \neq 0$. La *loi conditionnelle à* $[Y = y]$ *de* X est l'application $P_{[Y=x]} : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P([Y = y])}.$$

On dit que les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont *indépendants* si $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$. On dit que les deux variables aléatories discrètes X et Y sont *indépendantes* si $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$ pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y({}_omega)$.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire réelle discrète telle que pour tout $z \in Z(\Omega)$

$$[Z = z] = \bigcup_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : g(x,y) = z} \big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

La loi de probabilité de la variable Z est définie pour tout $z \in Z(\Omega)$ par

$$P([Z = z]) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : g(x,y) = z} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

En particulier, si les variables X et Y sont indépendantes, alors

$$P([Z = z]) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : g(x,y) = z} P([X = x])P([Y = y]).$$

En appliquant la définition ci-dessus à la fonction $g : (x, y) \mapsto x + y$, on obtient la somme $X + Y$ de deux variables aléatoires réelles discrètes : c'est donc la variable aléatoire réelle discrète telle que pour tout $z \in (X + Y)(\Omega)$

$$[X + Y = z] = \bigcup_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : x + y = z} \big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

La loi de probabilité de la variable $X + Y$ est définie pour tout $z \in (X + Y)(\Omega)$ par

$$P([X + Y = z]) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : x + y = z} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

En particulier, si les variables X et Y sont indépendantes, alors

$$P([X + Y = z]) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : x + y = z} P([X = x])P([Y = y]).$$

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction et on considère la variable aléatoire $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$. On dit que Z *admet une espérance* si la série double $\sum_{i,j} g(x_i, y_j) P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$ converges absolument (ce qui est automatiquement satisfait si X et Y sont variables aléatoires discrètes finies). Dans ce cas, l'espérance de Z est définie par

$$E(Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j) P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).$$

On reenvoie au chapitre 9 de C. Gautiers et al, *Mathématiques tout-en-un. BCPST 2ème année*, Dunod, 2008, pour plus d'information ainsi que pour les définitions de la covariance et la corrélation linéaire de deux variables aléatoires réelles discrètes.