

Applications linéaires

Par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si :
(1) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$,
(2) $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in E$ and $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les conditions (1) et (2) sont équivalentes à la condition suivante :

(1′) $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Une application linéaire bijective est dite *isomorphisme* ; une application linéaire ayant même espace vectoriel de départ et d'arrivée (c'est-à-dire $F = E$) est dite *endomorphisme* ; un endomorphisme bijectif est dit *automorphisme.* Si l'espace vectoriel d'arrivée F est le corps $\mathbb{K}$ on parle de *forme linéaire.*
On note :

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, ou $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E
- $E^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$

Le corps $\mathbb{K}$ en indice est souvent omis dans la notation ci-dessus.
$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et E^* sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ par rapport aux opérations usuelles de somme d'applications et de produit d'une application par un scalaire.

Exemples:
1) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (x + y, 3x, y)$ est une application linéaire. En effet, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)\big) &= f\big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\big) \\
&= \big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\big) \\
&= \lambda_1(x_1 + y_1, 3x_1, y_1) + \lambda_2(x_2 + y_2, 3x_2, y_2) \\
&= \lambda_1 f((x_1, y_1)) + \lambda_2 f((x_2, y_2)).
\end{aligned}$$

2) Soit $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{trace}(A)$ est linéaire (donc une forme linéaire). En effet, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a : $\mathrm{trace}(\lambda A + \mu B) = \lambda\, \mathrm{trace}(A) + \mu\, \mathrm{trace}(B)$.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Le *noyau de* f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est défini par $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v} \in E : f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
L'*image de* f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est définie par $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{w} \in F : \exists \vec{v} \in E \text{ tel que } f(\vec{v}) = w\}$.

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ; $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

$f : E \to F$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Si $E = \mathrm{Vect}\,\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_r)\}$. Par définition, $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Théorème du rang : On suppose que $\dim E$ est finie. Alors $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec $\dim E = n$, $\dim F = m$. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m\}$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice $m \times n$ dont les coefficients de la j-ème *colonne* sont les coefficients du vecteur $f(\vec{e}_j)$ dans $\mathcal{C}$: si

$$\begin{aligned}
f(\vec{e}_1) &= a_{1,1}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,1}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{m,1}\vec{\varepsilon}_m \\
f(\vec{e}_2) &= a_{1,2}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,2}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{m,2}\vec{\varepsilon}_m \\
&\vdots \\
f(\vec{e}_n) &= a_{1,n}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,n}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{m,n}\vec{\varepsilon}_m
\end{aligned}$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Si $F = E$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ on écrira $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ à la place de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (x + y, 3x, y)$. Soient

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)\}$$

les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement. On a :

$$f(\vec{e}_1) = (1, 3, 0) = \vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2 + 0\vec{\varepsilon}_3, \qquad f(\vec{e}_2) = (1, 0, 1) = \vec{\varepsilon}_1 + 0\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3\,.$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème : L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathbb{C}} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, qui associe à $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathbb{C}}(f)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$.

La composée de deux applications linéaires est linéaire. Plus précisement, soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,.$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, est définie par

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$$

où $\mathrm{id}_E : E \to E$ est l'application idéntique: $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in E$. La j-ème colonne de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ contient donc les composantes du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \qquad \text{et} \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)\,.$$

Alors

$$B = Q^{-1}AP$$

où :

$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Références :

(1) E. Azoulay, Mathématiques Pharmacie, Cours et exercices corrigés, EdiSciences, 1993.
(2) C. Gautier, A. Warusfel et al. : *Mathématiques, tout-en-un, BCPST 2ème année*, Dunod, 2008.