

Par la suite  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients réels, muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un nombre réel.

## 1. MATRICES DIAGONALES ET DIAGONALISABLES

On dit qu'une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *diagonale* si ses coefficients en dehors de ceux sur la diagonale principale sont nuls : donc  $D = (d_{i,j})_{i,j=1}^n$  avec  $d_{i,j} = 0$  pour tous  $i \neq j$ . Une notation parfois utilisée est  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  si  $d_1, \dots, d_n$  sont les éléments de la diagonale principale, c'est-à-dire  $d_j = d_{j,j}$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

*Exemple :*  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 0)$  est une matrice diagonale.

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale (on dit aussi que  $A$  est *semblable à une matrice diagonale*).

*Exemples/applications :*

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable : on peut en effet vérifier que  $P^{-1}AP = D$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{diag}(2, 1)$ . Les puissances de  $D$  se calculent facilement :  $D^k = \text{diag}(2^k, 1^k)$ . Par exemple,  $D^3 = \text{diag}(8, 1)$ . On remarque que  $A = PDP^{-1}$ . Par conséquent, on obtient par exemple que  $A^3 = (PDP^{-1})^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDDP^{-1} = PD^3P^{-1}$ , ce qu'on calcule facilement en multipliant les trois matrices  $P$ ,  $D^3$  et  $P^{-1}$ . En général, si  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  est une matrice diagonale et  $A = PDP^{-1}$ , alors pour tout entier positif  $k$  on a  $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$  et  $A^k = PD^kP^{-1}$ , qu'on calcule en tant que produit de trois matrices, pour n'importe quel  $k$ .

On remarque aussi que si  $A = PDP^{-1}$ , alors  $\det A = \det(PDP^{-1}) = (\det P)(\det D)(\det P)^{-1} = \det D$ . En particulier,  $A$  est inversible si et seulement si  $D$  est inversible (car une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul). Pour  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , on a  $\det D = d_1 \cdots d_n$  (c'est-à-dire, le déterminant de  $D$  est le produit des éléments diagonaux  $d_1, \dots, d_n$  de  $D$ ). Donc  $\det D \neq 0$  si et seulement si  $d_j \neq 0$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

Soit  $A$  une matrice diagonalisable, avec  $P^{-1}AP = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Si  $d_j \neq 0$  pour  $j = 1, \dots, n$ , alors  $D$  (et donc  $A$ ) est inversible. On a  $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$ . Donc  $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ , qu'on calcule en tant que produit de trois matrices. Par exemple, pour  $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$  comme au début de l'exemple, avec  $D = \text{diag}(2, 1)$ , on a  $\det A = \det D = 2 \cdot 1 = 2$  et

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{diag}(1/2, 1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

## 2. VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES D'UNE MATRICE CARRÉE

Il y a des matrices qui ne sont pas diagonalisables (on verra des exemples plus en loin). Il faut établir des critères qui nous permettent de dire si une matrice est diagonalisable et, si la réponse est positive, il faut avoir des méthodes qui nous permettent de diagonaliser la matrice (c'est-à-dire donné  $A$ , déterminer les matrices  $D$  et  $P$ ). Les outils qu'on va considérer sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Un nombre  $\lambda \in \mathbb{R}$  est *valeur propre* de  $A$  s'il existe un vecteur non nul  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Dans ce cas, on dit que  $\vec{v}$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ . Dans cette définition, on considère  $\vec{v}$  en tant que vecteur colonne et  $A\vec{v}$  est le produit de la matrice  $A$  par le vecteur colonne  $\vec{v}$ .

<sup>2</sup>*Exemple* : Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Le scalaire  $\lambda = 2$  est une valeur propre de  $A$  car  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas le vecteur nul de  $\mathbb{R}^2$  et

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{v}.$$

Ainsi  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre 2.

*Méthode pour déterminer les valeurs propres de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :*

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines réelles du *polynôme caractéristique de  $A$* , qui est le polynôme  $\chi_A$  défini par  $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$ . Ici  $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$  dénote la matrice identité  $n \times n$ .

Puisque  $\chi_A(x)$  est un polynôme de degré  $n$  en la variable  $x$ , il possède au plus  $n$  racines (comptées avec leur multiplicités algébriques). Puisque il y a des polynômes qui n'admettent pas de racines réelles, il y a des matrices qui n'ont pas de valeurs propres.

*Exemple 1* : Pour  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  on a  $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$ , d'où  $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = (2-x)(1-x)$  est un polynôme en  $x$  de degré 2, qui possède deux racines réelles,  $x = 2$  et  $x = 1$ , chacune de multiplicité algébrique égale à 1. La matrice  $A$  possède donc les deux valeurs propres 2 et 1.

*Exemple 2* : Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Le polynôme caractéristique de  $B$  est  $\chi_B(x) = \det(B - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$ , qui ne possède aucune racine réelle. La matrice  $B$  n'a pas de valeurs propres.

*Exemple 3* : Pour  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  on a  $\chi_C(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$ , qui possède une seule racine réelle  $x = 1$  de multiplicité algébrique 2.

*Remarque* : Dans ce qui précède on a considéré les valeurs propres, en sous-entendant qu'elles sont réelles, c'est-à-dire racines *réelles* du polynôme caractéristique. Il y a aussi une notion de *valeur propre complexe* : c'est une racine complexe du polynôme caractéristique. Par exemple, la matrice  $B$  de l'exemple 2 n'a pas de valeurs propres (réelles), mais elle possède deux valeurs propres complexes, notamment  $x = i$  et  $x = -i$ , qui sont les solutions complexes de  $x^2 + 1 = 0$ . A rappeler : toute matrice  $n \times n$  à coefficients réels possède toujours au moins une valeur propre complexe car tout polynôme possède au moins une racine complexe. En effet, un polynôme de degré  $n$  possède *exactement*  $n$  racines complexes comptées avec leurs multiplicités algébriques. Donc toute matrice carrée  $n \times n$  possède toujours exactement  $n$  valeurs propres complexes comptées avec leurs multiplicités algébriques. Par la suite on considère seulement valeurs propres qui sont des nombres réels.

*Méthode pour déterminer les vecteurs propres d'une valeur propre donnée :*

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On cherche les vecteurs propres de valeur propre  $\lambda$  : ils sont les vecteurs non-nuls  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , c'est-à-dire tels que  $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$ , c'est-à-dire les solutions non-nulles du système linéaire homogène de matrice des coefficients  $A - \lambda I_n$ .

L'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice des coefficients  $A - \lambda I_n$  est dit *espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$* . Ses éléments non-nuls sont les vecteurs propres de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ .

*Exemple* : La matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  a valeurs propres  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ .

On calcule les vecteurs propres de valeur propre  $\lambda = 1$  comme solutions  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  du système linéaire homogène de matrice des coefficients  $A - I_2 = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Les solutions de ce système sont les couples  $(x_1, x_2)$  avec  $x_2 = -x_1$  et  $x_1 \in \mathbb{R}$ . L'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda = 1$  est l'espace vectoriel  $\text{Vec}(1, -1)$ , de dimension 1, de  $\mathbb{R}^2$ . Tout élément non nul de  $\text{Vec}(1, -1)$  est un vecteur propre de valeur propre 1 de  $A$ .

On calcule les vecteurs propres de valeur propre  $\lambda = 2$  comme solutions  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  du système linéaire<sup>3</sup> homogène de matrice des coefficients  $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Les solutions de ce système sont les couples  $(x_1, 0)$  avec  $x_1 \in \mathbb{R}$  : l'espace propre de  $A$  associé à  $\lambda = 2$  est l'espace vectoriel  $\text{Vec}(1, 0)$ , de dimension 1, de  $\mathbb{R}^2$ . Tout élément non nul de  $\text{Vec}(1, 0)$  est un vecteur propre de valeur propre 2 de  $A$ . On remarque que les vecteurs propres  $\vec{v}_1 = (1, -1)$  et  $\vec{v}_2 = (1, 0)$  ainsi déterminés sont linéairement indépendants (on dit aussi que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est une famille libre).

*Propriétés :*

- (1) Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- (2) Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

### 3. DIAGONALISATION D'UNE MATRICE CARRÉE DIAGONALISABLE

*Exemple 1 :* On considère à nouveau l'exemple de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , de valeurs propres  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ . Puisque  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est une famille libre de deux éléments de  $\mathbb{R}^2$  et la dimension de  $\mathbb{R}^2$  est égale à 2,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Donc la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible (la  $j$ -ème colonne de  $P$  contient les composantes de  $\vec{v}_j$ ,  $j = 1, 2$ ). On calcule  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2)$ . Ainsi :  $A$  est diagonalisable, les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ . Les colonnes de la matrice  $P$  contiennent les composantes d'une base de  $\mathbb{R}^2$  formée par vecteurs propres.

Cet exemple correspond à une matrice  $2 \times 2$  ayant deux valeurs propres distinctes. La méthode de diagonalisation utilisée se généralise aux matrices carrées  $n \times n$  ayant  $n$  valeurs propres. Plus généralement, on a le résultat suivant :

*Théorème :* Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres de  $A$  est égale à la dimension  $n$  de la matrice.

En particulier, une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant exactement  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

La condition du théorème ne peut pas être satisfaite si le polynôme caractéristique de  $A$  n'a pas exactement  $n$  racines comptées avec multiplicités. Par exemple, la matrice  $B$  de l'exemple 2, qui n'a pas de valeurs propres, ne peut pas être diagonalisable.

Une classe de matrices qui sont *toujours* diagonalisables sont les matrices symétriques. On rappelle qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *symétrique* si  $A^t = A$ , où  $A^t$  dénote la transposée de  $A$ .