

Matrices

Une *matrice* (réelle) $m \times n$ est un tableau à m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{R}$. On note

$$A = \Big(a_{i,j}\Big)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$$

la matrice dont $a_{i,j}$ est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi écrire simplement $A = (a_{i,j})$ quand il n'y a pas ambiguïté sur la dimension de A.
Les nombres $a_{i,j}$ s'appellent les *coefficients* de A. L'ensemble des matrices réelles $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×4 et $a_{2,4} = 6$.

Si tous les coefficients de A sont nuls, on dit que A est la *matrice nulle* ; on la note $0_{m,n}$ (ou plus simplement 0).
Lorsque $m = n$ on dit que A est une *matrice carrée d'ordre* n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n avec $A = (a_{i,j})$. Les coefficients $a_{j,j}$ de la matrice s'appellent les *éléments diagonaux* de A. Lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$, on dit que A est une *matrice diagonale*. La matrice diagonale d'ordre n avec $a_{j,j} = 1$ pour tout j s'appelle la *matrice unité* ; on la note I_n.

Opérations sur les matrices $m \times n$. .
Somme de deux matrices $m \times n$: Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La *somme de A et B*, notée $A + B$, est la matrice $m \times n$ définie par :

$$A + B = \Big(c_{i,j}\Big)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n} \qquad \text{avec } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ pour tout } i, j\,.$$

Produit d'une matrice $m \times n$ par un scalaire: Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice produit de λ et A, notée λA est la matrice $m \times n$ définie par :

$$\lambda A = \Big(c_{i,j}\Big)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n} \qquad \text{avec } c_{i,j} = \lambda a_{i,j} \text{ pour tout } i, j\,.$$

Propriétés de la somme de matrices : Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors
(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (la somme de matrices est *associative*).
(2) $A + B = B + A$ (la somme de matrices est *commutative*)
(3) $O_{m,n}$ est l'*élément neutre* pour l'addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $A + O_{m,n} = A$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
(4) La matrice $-A = (-a_{i,j})$ s'appelle l'*opposée de A*. Elle vérifie $A + (-A) = 0_{m,n}$.

Propriétés du produit d'une matrice par un scalaire: Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :
(1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
(2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
(3) $1A = A$;
(4) $0A = 0_{m,n}$.

Produit d'une matrice $m \times n$ et d'une matrice $n \times p$. Soient $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = \Big(b_{j,l}\Big)_{1 \le j \le n; 1 \le l \le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le *produit de A et de B*, noté AB, est la matrice $m \times p$ définie par

$$AB = \Big(c_{i,l}\Big)_{1 \le i \le m; 1 \le l \le p} \qquad \text{avec } c_{i,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l} \text{ pour tout } i, j\,.$$

Le coefficient de AB d'indice i, l est donc obtenu en sommant les produits des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par les éléments correspondants de la $l^{\text{ème}}$ colonne de B.
Remarques : Pour que le produit AB soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
Le produit AB existe toujours si A et B sont carrées du même ordre n.
Si AB et BA existent, en général, $AB \neq BA$.
Propriétés :
(1) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$: $A(BC) = (AB)C$.
(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $A(B + C) = AB + AC$.
(3) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $(A + B)C = AC + BC$.

(4) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
(5) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $AI_n = I_n A = A$.

Transposée. Soit $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leq i\leq m\,;1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La *transposée* de A, notée A^T, est la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le (i,j)-ème coefficient est $a_{j,i}$.
Propriétés : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
(1) $(A^T)^T = A$;
(2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
(3) Si $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $(A+B)^T = A^T + B^T$;
(4) Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. Le produit $\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{k\text{-fois}}$ s'appelle la *puissance $k^{ème}$ de A*, notée A^k. En particulier : $A^1 = A$ et $A^{k+1} = A^k A = AA^k$. On pose, par convention, $A^0 = I_n$.
Remarque : En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrice inverse. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice B qui vérifie l'égalité $AB = I_n$, alors on dit que A est *inversible* et B est la *matrice inverse* de A et on la note A^{-1}. Elle satisfait $A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$.

Matrices semblables. On dit que deux matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Déterminants. Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est le nombre réel $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. On le note souvent $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$
Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ est le nombre réel

$$\det(A) = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,2} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{3,2} \\ a_{2,2} & a_{3,1} \end{vmatrix}.$$

On le note souvent $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$.
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n. Le *mineur* $M_{i,j}$ de A est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Le *cofacteur* $C_{i,j}$ de A est $(-1)^{i+j}M_{i,j}$. Le *déterminant de la matrice* A, noté $\det(A)$, est par définition la somme $\sum a_{i,j}C_{i,j}$ des produits des éléments de l'une quelconque de ses lignes (ou de ses colonnes) par leur cofacteurs respectifs.
Propriétés : Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(2) Si A est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n}$, alors $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$. En particulier, $\det(I_n) = 1$.
(3) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.
(4) $\det(A^T) = \det(A)$
(5) Multiplier une colonne par λ, entraîne la multiplication du dterminant par la même valeur. Par conséquent : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
(6) Échanger deux lignes (resp. deux colonnes) , entraîne la multiplication du déterminant par -1
(7) Ajouter à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) ne modifie pas le déterminant.
(8) Le déterminant d'une matrice ayant deux de ses lignes (resp. colonnes) égales ou propostionnelles est nul.