Université Paul Verlaine – Metz
Préparation concours 2 (L2, BE)

Année universitaire 2010-2011
A. Pasquale

1. Séries numériques

1.1. **Définitions.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle *série numérique* de *terme général* a_n la quantité $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ...$

La *somme partielle de rang* n de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est le nombre $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
On dit que la série de terme général a_n est *convergente* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Sinon, on dit que la série est *divergente*.
Dans le cas où la série de terme général a_n converge, la limite, notée S, de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série*. On note : $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Le *reste d'ordre* n de la série, noté R_n, est défini par $R_n = S - S_n$.
La *nature d'une série* est le fait qu'elle converge ou diverge. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Conditions nécessaires de convergence: Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
Ces conditions ne sont pas suffisantes.

1.2. **Exemple: La série géométrique.** C'est la série de terme général $a_n = aq^n$ où a et q sont des constantes fixées (a le premier terme de la série ; q est dite la *raison* de la série). On supposera que $a \neq 0$.
Si $q \neq 1$, la somme partielle de rang n de la série géométrique est $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème : la série géométrique de terme général $a_n = aq^n$ est:
- convergente, de somme $S = \dfrac{a}{1-q}$, si $|q| < 1$.
- divergente, si $|q| \geq 1$.

1.3. **Séries à termes positifs.** Une série $\sum a_n$ est dite *à termes positifs* si $a_n \in [0, +\infty[$ pour tout n.

Condition nécessaire et suffisante de convergence : Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est bornée supérieurement, c'est-à-dire s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $S_n \leq C$ pour tout n.
(dans ce cas, en effet, la suite (S_n) est croissante et bornée, donc convergente).

Théorèmes de comparaison :
I. Supposons qu'à partir d'un certain rang n on a $0 \leq a_n \leq b_n$.
- Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

II. Supposons que la limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ existe finie et est égale à ℓ avec $\ell > 0$. Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature (convergent ou divergent ensemble).

Critères de convergence :

Critère de Cauchy : S'il existe une constante positive $K < 1$ telle que à partir d'un certain rang n, on a $\sqrt[n]{a_n} \leq K$, alors $\sum a_n$ converge.
Si à partir d'un certain rang n on a $\sqrt[n]{a_n} \leq 1$, alors $\sum a_n$ diverge.

Règle de Cauchy : Supposons que la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe et est égale à ℓ.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge.
- Le cas $\ell = 1$, est douteux.

Critère de D'Alambert : S'il existe une constante positive $K < 1$ telle que à partir d'un certain rang n, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$, alors $\sum a_n$ converge.
Si à partir d'un certain rang n on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.

Règle de D'Alambert : Supposons que la limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe et est égale à ℓ.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge.
- Le cas $\ell = 1$, est douteux.

Comparaison avec une intégrale :

Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante pour $x \geq x_0$.
Alors la série de terme général $a_n = f(n)$ et l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ont la même nature (convergent ou divergent ensemble).

Application : La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$:

- converge pour $\alpha > 1$,
- diverge pour $\alpha \leq 1$.

Règle "$n^\alpha a_n$" :

Si pour $A > 0$ il existe $\alpha > 1$ tel que

$$n > N \Rightarrow n^\alpha a_n < A$$

alors $\sum a_n$ converge.
Si pour $B > 0$ il existe $\alpha \leq 1$ tel que

$$n > N \Rightarrow n^\alpha a_n > B$$

alors $\sum a_n$ diverge.

1.4. **Séries absolument convergentes.** Une séries $\sum a_n$ est *absolument convergente* si $\sum |a_n|$ converge. Dans ce cas, la série $\sum a_n$ converge aussi.

Quelques références :

[1] Elie Azoulay, Mathématiques Pharmacie, Cours et exercices corrigés, EdiSciences, 1993.
[2] Claudia Neuhauser, Calculus for Biology and Medicine, Prentice Hall, 2003.
[3] J. Steward, Calculus, Early transcendentals, Brooks Cole Publishing Company, 1999.