Feuille de TD n^0 1. Rappels sur les espaces L^p

Exercice 1 Pour un interval $I \subset \mathbb{R}$ on note $\mathcal{L}^p(I)$ l'espace des fonctions $\mathcal{L}^p$-intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur I.

(a) Déterminer une fonction dans $\mathcal{L}^1([0,1])$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{L}^2([0,1])$.

(b) Soient $1 \le p < q \le \infty$. Déterminer une fonction dans $\mathcal{L}^p([0,1])$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{L}^q([0,1])$.

(c) Soient $1 \le p < q \le \infty$. Montrer que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que si l'on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure bornée alors

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \text{ si } q < p < +\infty.$$

(e) Montrer que si l'on remplace la mesure de Lebesgue par la mesure de comptage alors

$$\mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \text{ si } q < p < +\infty.$$

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $0 < p < +\infty$. On définit

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$$

et on dit que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ lorsque $\|f\|_p < \infty$.

(a) Vérifier que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ pour les opérations usuelles :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x)\,, \qquad && f, g \in \mathcal{L}^p,\ x \in X \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x)\,, && \lambda \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{L}^p,\ x \in X\,. \end{aligned}$$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) > 0$ et $\mu(B) > 0$. On note par χ_A la fonction indicatrice de A. Montrer que si $0 < p < 1$, alors $\|\chi_A + \chi_B\|_p > \|\chi_A\|_p + \|\chi_B\|_p$. En déduire que $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \to [0, +\infty)$ ne satisfait pas l'inégalité triangulaire pour $0 < p < 1$.

[*Indication :* Observer que si $a > 0$, $t > 0$ et $0 < p < 1$, alors $t^{p-1} > (a+t)^{p-1}$. En déduire que si $a > 0$, $b > 0$ et $0 < p < 1$, alors $a^p + b^p > (a+b)^p$.]

Exercice 3 (a) Soient $a \ge 0$, $b \ge 0$ et $0 < \lambda < 1$. Alors

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b\,. \tag{*}$$

[*Indications :* Si $b \ne 0$, diviser par b et étudier la fonction $f(t) = t^\lambda - \lambda t$.]

(b) **[Inégalité de Hölder pour** $p, q \in]1, +\infty[$ **]** Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

[*Indications :* Montrer d'abord que l'inégalité de Hölder est vérifiée si :

(i) $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$;

(ii) $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$.

Montrer ensuite qu'il suffit de vérifier l'inégalité si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Conclure en appliquant l'inegalité (*) avec $a = |f(x)|^p$, $b = |g(x)|^q$ et $\lambda = 1/p$.]

Exercice 4 [Inégalité de Minkowski] Soit $p \in [1, +\infty[$. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

[*Indications :* Vérifier que $|f+g|^p \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$ et appliquer l'inégalité de Hölder.]

Exercice 5 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que l'espace $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ est complet.