Feuille de TD n^0 2.

Formes bilinéaires, formes quadratiques et espaces préhilbertiens

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On désigne respectivement par $\mathrm{Tr}(A)$ et A^t la trace matricielle et la transposée de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$.

(a) Vérifier que φ est une application bilinéaire.

(b) Quelle est sa matrice dans la "base canonique" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Soient ϕ_1 et ϕ_2 définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\phi_1(A) = (\mathrm{Tr}(A))^2$ et $\phi_2(A) = \mathrm{Tr}(A^t A)$.

(a) Montrer que ϕ_1 et ϕ_2 sont des formes quadratiques.

(b) Sont-elles positives ? définies positives ?

Exercice 2 Pour $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \text{ et } q(P) = B(P, P).$$

(1) Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?

(2) Montrer que q est une forme quadratique. La forme q est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.

(3) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_n = \{1, X, \cdots, X^n\}$.

(4) Préciser cette matrice si $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 3

Soient $V = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a - d = 0\}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On définit l'application $B : V \times V \to \mathbb{R}$ en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B(M, N) = \mathrm{Tr}(MJN).$$

(1) Vérifier que $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ est une base de V.

(2) Vérifier que B est une forme bilinéaire. Montrer qu'elle n'est ni symétrique ni antisymétrique (sur V).

(3) On pose $q(M) = B(M, M)$ pour tout $M \in V$. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.

(4) Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.

(5) La forme q est-elle définie ? positive ? négative ?

(6) Déterminer l'orthogonal dans V relativement à la symétrisation S de B du sous-espace

$$F = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a - d = 0\}.$$

Exercice 4 Pour $n \geq 1$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On pose

$$\Phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}Q(x)dx$$

pour P et Q dans $\mathbb{C}_n[X]$.

(1) Vérifier que Φ définit une forme hermitienne sur $\mathbb{C}_n[X]$.

(2) Est-elle positive ? négative ? définie ?

(3) Mêmes questions avec $\Phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \overline{P(x)}Q(-x)dx$.

Exercice 5

(1) Démontrer que la boule unité fermée d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe.

(2) Soit f une application surjective d'un espace préhilbertien réel E dans lui-même qui satisfait

$$< f(x) \mid f(y) >=< x \mid y > \quad \forall x, y \in E.$$

Montrer que f est un endomorphisme.

(3) Soit f un endomorphisme d'un espace préhilbertien complexe E tel que

$$< f(x) \mid x >= 0 \quad \forall x \in E.$$

Montrer que f est nulle, i.e $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 6

(1) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. On pose $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.
Soient $x, y \in E$ tels que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$.
Montrer que les vecteurs x et y sont proportionnels.

(2) Supposons maintenant que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit une forme hermitienne positive mais pas définie positive. Montrer qu'on peut avoir $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$ sans que les deux vecteurs x et y de E soient proportionnels.

Exercice 7 Montrer qu'afin qu'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ soit préhilbertien, il faut et il suffit que sa norme satisfait l'identité du parallelogramme.