# Feuille de TD n$^0$ 2 : Révision – Applications linéaires

**Exercice 1** Parmi les applications suivantes déterminer lesquelles sont linéaires sur $\mathbb{R}$. Pour chacune de celles-ci, déterminer son noyau et son image. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2 + x\,,$ $\qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 2x - 1\,,$
$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y) \mapsto (-y, x + 2y)\,,$ $\qquad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}\,,$
$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}z$ $\qquad f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto 2\overline{z} + 1\,,$
$f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x - 3y + 1\,,$ $\qquad f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y, z) \mapsto (x - y, z)\,,$
$f_9 : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}\,, \quad p(x) \mapsto p(0)\,,$ $\qquad f_{10} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad A \mapsto \mathrm{trace}(A)\,,$
$f_{11} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})\,, \quad A \mapsto A - A^t\,,$ $\qquad$ où $A^t$ dénote la transposée de $A$

Est-ce que les applications $f_4$, $f_5$ et $f_6$ sont linéaires sur $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 2** Soit $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ la dérivation de polynômes, définie par $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Montrer que $D$ est linéaire, surjective, mais pas injective.

**Exercice 3** Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que la composée $g \circ f$ est une application linéaire.
(b) On suppose que $f$ est bjective (donc un isomorphisme). Montrer que $f^{-1}$ est une application linéaire.
(c) Déduire de ce qui précède que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel $E$ muni de la loi de composition d'applications est un groupe.
(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

**Exercice 4** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f((-1, 1)) = (1, 0, 1)$ et $f((2, -1)) = (1, 1, -1)$.

(a) Déterminer $f((3, 3))$.
(b) Déterminer la matrice de $f$ dans les bases canoniques.

**Exercice 5** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels réels de dimension 3 et 4, respectivement. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de $E$ et $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}\}$ une base de $F$. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice associée dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Déterminer des bases pour le noyau et pour l'image de $f$.

**Exercice 6** Soit $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire (sur $\mathbb{C}$) dont la matrice associée dans les bases canoniques est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

(b) Déterminer l'image sous $f$ de l'hyperplan $H$ de $\mathbb{C}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1,0,0,-2)$, $\vec{u}_2 = (1,-2,0,0)$, $\vec{u}_3 = (0,2,1,0)$.

**Exercice 7** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice associée aux bases canoniques est

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer $f((1,2,3))$ et $f((x_1,x_2,x_3))$.

(b) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $f$ dans les bases

$$\mathcal{B} = \{2e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \{e_3, e_1, e_2\}.$$

**Exercice 8** Le systéme d'équations linéaires :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \\ y_2 = ax_2 - x_3 + bx_4 \\ y_3 = bx_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

décrit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ donnée par rapport aux beses canoniques. Ici $a$ et $b$ sont des paramètres réels.

(a) Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ afin que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

(b) Pour les valeurs de $a$ et $b$ déterminées en (a), donner des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 9** Soit $S : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $S(A) = A^t - A$, où $A^t$ dénote la transposée de $A$. Déterminer le noyau et l'image de $S$ ainsi que leurs dimensions.