Université de Lorraine – Metz — Année universitaire 2012-2013
Algèbre 2 (L2)

Feuille de TD n^0 3 : Sommes et sommes directes

Exercice 1 (a) Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(0,1,1,0)$ et $(1,1,1,1)$. Ce supplémentaire est-il unique ?

(b) On considère les deux sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \text{Vect}((1,0,1)) \qquad \text{and} \qquad G = \text{Vect}((1,1,1),(1,1,0))\,.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

(c) Est-ce que la relation $E = F \oplus G$ est encore valable si $E = (\mathbb{Z}_2)^3$?

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}_4[x]$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \text{Vect}(1 - x + x^4)\,, \quad F = \text{Vect}(1, x^3)\,, \quad G = \text{Vect}(x, x^3)\,.$$

Déterminer la dimension et une base de $F + G + H$. Est-ce que F,G et H sont en somme directe ?

Exercice 3 Soient

$$\begin{aligned}
&F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}\\
&G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = x_4 = 0\}\\
&H = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \qquad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = (1,1,1,1) \text{ et } \vec{u}_2 = (1,1,0,0).
\end{aligned}$$

(a) Déterminer la dimension et une base de F.

(b) Vérifier que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G = F \oplus H$.

(c) Écrire la matrice de la projection vectorielle sur F parallélement à G dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(d) Écrire la matrice de la projection vectorielle sur G parallélement à F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(e) Écrire la matrice de la projection vectorielle sur F parallélement à H dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(f) Écrire la matrice de la symétrie vectorielle sur F parallélement à H dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ où $\vec{u}_3 = (1,0,0,0)$ et $\vec{u}_4 = (0,0,0,1)$.

Exercice 4 Soit

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = x + hy + (2-h)z = x + h^2 y - (3h-4)z = 0\}\,,$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

(a) Déterminer la dimension et une base de W en fonction de la valeur de h.

(b) Déterminer un sous-espace supplémentaire à W dans $\mathbb{R}^3$ si $h = 1$.