Université de Lorraine – Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2012–2013
Algèbre linéaire (L2)

Partiel du 15 novembre 2012
Durée : 2 heures

Questions de cours [4 points]

1. [1 point] Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps commutif $\mathbb{K}$. On suppose que $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ et $\dim_{\mathbb{K}} F = m$. Quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans F ? (Aucune preuve n'est demandée)

2. [1 point] Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Définir la projection vectorielle sur F parallèlement à G.

3. [2 points] Donner la définition d'un projecteur. Enoncer (sans preuve) une condition nécessaire et suffisante afin que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit un projecteur.

Exercice 1. **[3 points]**

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + (\alpha + 1)z = \alpha,\ 2x + 2y + z = 0\}$.

(a) Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Justifier votre réponse.

(b) Pour les valeurs de α déterminées en (a), donner la dimension et une base de V.

Exercice 2. **[11 points]**

On dénote par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de degré $\leq n$. Soit $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'application linéaire définie par

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3a + 2c + d)x^2 + (4a - 2b + 2c + 3d)x + (a + c + d)\,.$$

(a) Déterminer la matrice A de f par rapport aux bases canoniques $\mathcal{B}_3 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathcal{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Déterminer la dimension et une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.

(c) Déterminer la dimension et une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

(d) Vérifier que $\mathcal{B} = \{x^2 + 1, x^2, x^2 + x + 1\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(e) Déterminer la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

(f) Quelle est la relation entre les matrices A et B ?

Exercice 3. **[6 points]**

Soient

$$U = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$$
$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y - z = 0\}$$

(a) Vérifier que U et V sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la matrice de la projection vectorielle sur U parallèlement à V par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.