Université de Lorraine – Metz
Fondements de l'analyse (L3)

Année universitaire 2012-2013

13/11/2012, Durée : 2 heures

L'usage de calculatrices, de documents écrits ou de téléphones portables n'est pas autorisé.

Question de cours (4 pts).

1. Donner la définition d'une partie dense d'un espace topologique.

2. Donner la définition d'un espace topologique séparé (ou de Hausdorff).

3. Montrer que tout espace métrique est séparé.

4. Donner l'exemple d'un espace semi-métrique qui n'est pas séparé.

Exercice 1 (8 pts).
Considérons $\mathcal{T}_1 := \{]a,+\infty[\colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{T}_2 := \{]-\infty, a[\colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Notons $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que tout élément de $\mathcal{T}$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

3. En déduire que les deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont moins fines que la topologie $\mathcal{T}$.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ pour les trois topologies $\mathcal{T}, \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Déterminer l'intérieur de $\mathbb{Z}$ et l'intérieur de $]a, b[$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ (resp. dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$).

6. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace toplogique et A une partie de X. On considère l'application $1_A : X \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \notin A,$$

c'est-à-dire 1_A est l'application caractéristique de A.

6. Montrer que $1_A : (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ est continue si et seulement si A est une ouvert de $(X, \mathcal{O})$.

7. Montrer que $1_A : (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ est continue si et seulement si A est une fermé de $(X, \mathcal{O})$.

8. En déduire que $1_A : (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si A est à la fois un fermé et un ouvert de $(X, \mathcal{O})$.

Exercice 2 (4 pts).
Soient X un ensemble qui contient au moins deux points et A une partie non vide de X. On considère $\mathcal{T}_A := \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur X.

2. Montrer que la topologie $\mathcal{T}_A$ n'est pas séparée.

3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence d'une partie Y de X.

4. Si B est une partie de X, montrer qu'une application $f : (X, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T}_B)$ est continue si et seulement si $f(A) \subseteq B$.

Exercice 3 (6 pts).
Soit E un ensemble non vide et d une semi-distance sur E.

1. On considère sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $d(x,y)=0$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Notons $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E relativement à $\mathcal{R}$. Considérons la surjection canonique $\pi : E \to E/\mathcal{R}$, définie par $\pi(x) := \bar{x}, \forall x \in E$, où $\bar{x}$ désigne la classe d'équivalence de x relativement à $\mathcal{R}$.

2. Montrer que l'application $\delta : E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R} \to \mathbb{R},$ définie par: $\delta(\bar{x}, \bar{y}) := d(x,y),$ est bien définie.

3. Montrer que $(E/\mathcal{R}, \delta)$ est un espace métrique.

4. Soient r un réel strictement positif et x un élément de E. On note $B_d(x,r)$ and $B_\delta(x,r)$ respectivement les boules ouvertes de centre x et rayon r par rapport à d et δ. Montrer que $\pi(B_d(x,r)) = B_\delta(\pi(x), r)$ et que $\pi^{-1}(B_\delta(\pi(x),r)) = B_d(x,r)$.

5. En déduire que sur $E/\mathcal{R}$ la topologie associée à la distance δ et la topologie quotient définie sur $E/\mathcal{R}$ par la topologie de l'espace semi-métrique (E,d) coïncident.