Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2012-2013
Fondements de l'analyse (L3)

Feuille de TD n^0 2 : Espaces topologiques, comparaison de topologies

Exercice 1 (Extrait du partiel du 16 novembre 2010) Soit X un ensemble non vide et soit A une partie non vide de X fixée. On pose

$$\mathcal{O} = \{U; A \subset U \subset X\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur X.

(b) Déterminer la famille $\mathcal{F}$ des fermés de $(X, \mathcal{O})$.

(c) Soit B une partie de X. Déterminer B° et $\overline{B}$ dans $(X, \mathcal{O})$.

(d) Soit $x \in X$. Déterminer les éléments du filtre des voisinages $\mathcal{V}_x$ de x dans $(X, \mathcal{O})$.

Exercice 2 Soit X un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $A^{\circ\circ} = A^\circ$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(b) si $A \subset B$, alors $A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(e) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$,

(f) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.

Donner des contre-exemples aux assertions réciproques de (e) et (f).

Exercice 3 (Extrait du partiel du 19 novembre 2009) Soit $\mathcal{T}$ la famille de parties de $\mathbb{R}$ définie par $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R} | \ \mathbb{R} \backslash A \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

(c) Démontrer que tout ouvert non vide de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire l'adhérence de A relativement à la topologie $\mathcal{T}$ est $\mathbb{R}$).

(d) En déduire que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé et que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable.

Exercice 4 La *droite achevée* est l'ensemble, noté $\overline{\mathbb{R}}$, égal à $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ où $+\infty$ et $-\infty$ sont deux éléments distincts qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : [-1, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$$f(-1) = -\infty, \qquad f(1) = +\infty, \qquad f(t) = \frac{t}{1 - |t|} \quad \text{pour } t \in]-1, 1[.$$

On muni $[-1, 1]$ de la topologie induite de $\mathbb{R}$ et on muni $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie finale engendrée par la fonction f.

(a) Montrer que la fonction f est un homéomorphisme par rapport à la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi définie.

(b) Montrer que $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle est un sous-espace topologique de $\overline{\mathbb{R}}$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty \leq x \leq +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre totale sur l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

On écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$, on définit les intervalles d'extremités a et b comme suit :

$$[a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}, \qquad]a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\},$$
$$[a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}, \qquad]a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}.$$

En particulier, on a $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x\}$, etc.

(e) Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'une partie U de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage de x dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est veérifiée :

1) $x \in \mathbb{R}$ et il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$;
2) $x = +\infty$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty] \subset U$;
3) $x = -\infty$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, a] \subset U$.

(f) Déterminer une base du filtre des voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

(g) Déterminer une base pour les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.

(h) Montrer que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(i) Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace topologique séparé.

(j) Montrer que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Exercice 5 Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques et f une application de $(X, \mathcal{O})$ vers $(Y, \mathcal{T})$. On dit que f est une application ouverte (resp. fermée) si pour tout ouvert U (resp. fermé F) de X, $f(U)$ (resp. $f(F)$) est un ouvert (resp. fermé) de Y.

1. On suppose maintenant que $X = Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{T}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) := x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, n'est pas ouverte.
   (b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) := 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est continue, fermée et non ouverte.
2. On suppose dans cette question que $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}$ est la topologie grossière et $\mathcal{T}$ est la topologie discrète sur $\mathbb{R}$. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ l'application définie par :

$$f(x) := -1,\ \forall x \in]-\infty, 0[;\ \ f(0) = 0;\ \ f(x) := 1,\ \forall x \in]0, +\infty[.$$

   Montrer que f est ouverte, fermée et non continue.

Exercice 6 Soient X un ensemble, R une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/R$ la projection canonique qui associe à tout $x \in X$ sa classe d'équivalence par rapport à R. Soit $f : X \to Z$ une fonction de X dans l'ensemble Z telle que $f(x) = f(y)$ pour tous $x, y \in X$ vérifiant xRy.

(a) Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f} : X/R \to Z$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est une application surjective si et seulement si f est surjective.

(c) Montrer que $\widetilde{f}$ est injective si et seulement si la condition $f(x) = f(y)$ entraîne xRy.

Supposons maintenant que X et Z sont deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue par rapport à la topologie quotient.