Université de Lorraine – Metz
Fondements de l'analyse (L3)

Année universitaire 2012-2013

Feuille de TD n^0 3 : Compacité et connexité

Exercice 1 (a) Soit X un espace topologique séparé et soit Y une partie compacte de X. Soit $x \in X$ tel que $x \notin Y$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V de X tels que $Y \subset U$, $x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

(b) Montrer que la propriété dans (a) n'est pas vraie si X n'est pas séparé.

(c) Soit X un espace topologique localement compact et soit $x \in X$. Montrer que pour tout voisinage U de x il existe un voisinage V de x qui est compact et tel que $V \subset U$.

Exercice 2 Soit K une partie (quasi-)compacte non vide d'un espace (semi-)métrique (X, d), et soit U une partie ouverte de X telle que $K \subset U$. Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

$$\{x \in X : d(x, K) < r\} \subset U_,.$$

[*Indication :* Considérer la fonction $f : K \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = d(x, X \setminus U)$]

Exercice 3 (a) Soit X un espace topologique et soit $\{0, 1\}$ l'espace topologique qui contient les deux points 0 et 1, muni de la topologie discrète. Montrer que X n'est pas connexe si et seulement s'il existe une fonction continue surjective $f : X \to \{0, 1\}$.

(b) Soit X un espace topologique et $\{X_j\}_{(j\in I)}$ une famille de parties connexes de X telle que $X = \cup_{j\in I} X_j$. On suppose qu'il existe une partie connexe $C \subset X$ telle que $C \cap X_j \neq \emptyset$ pour tout $j \in I$. Montrer que X est connexe.

[*Indication :* Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Considérer la restriction de f à chaque X_j et à C.]

(c) Soit

$$H = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$$

muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que H est connexe.

Exercice 4 (a) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un espace topologique non connexe dans la topologie induite par $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (donc connexe) dans la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. En déduire que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ est connexe par arcs (donc connexe) pour tout $p \in \mathbb{R}^2$.

(c) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ ne sont pas homéomorphes pour tout $p \in \mathbb{R}^2$.

(d) Déduire de (c) que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.