Université de Lorraine – Metz  Année universitaire 2013-2014
Algèbre et Géométrie (M1)

**Feuille de TD n$^0$ 1 : Groupes symétriques, alternés et dihedraux**

**Exercice 1** (a) Soit $\sigma = (i_1\ i_2 \cdots i_k) \in S_n$ un $k-$cycle et soit $\tau \in S_n$. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1}$ est le $k-$cycle $(\tau(i_1)\ \tau(i_2) \cdots \tau(i_k))$.

(b) Montrer que si $\sigma, \sigma' \in S_n$ sont deux $k-$cycles, alors $\sigma$ et $\sigma'$ sont conjugués (c'est-à-dire, il existe $\tau \in S_n$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$).

(c) Montrer que deux permutations $\sigma, \sigma' \in S_n$ sont conjuguées si, et seulement si, dans leur décomposition canonique en cycles, apparaissent les mêmes nombres de $k-$cycles pour tout entier $k \in \{2, \ldots, n\}$.

(d) On appelle partition d'un entier $n$ toute suite décroissante d'entiers positifs $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.
Montrer que le nombre de classes de conjugaison du groupe $S_n$ est le nombre de partitions de l'entier $n$.

**Exercice 2** Montrer que $S_n$ est engendré par :

(a) les $n-1$ transpositions $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), \ldots, (1\ n)$,

(b) les $n-1$ transpositions $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \ldots, (n-1\ n)$,

(c) $\sigma = (1\ 2)$ et $\tau = (1\ 2\ 3 \cdots n)$.

**Exercice 3** Montrer que $A_n$ est engendré par les carrés des éléments de $S_n$.

**Exercice 4** Montrer que $A_4$ n'a pas de sous-groupes d'ordre 6.

**Exercice 5** On rappelle que le centre $C(G)$ d'un groupe $G$ est le sous-groupe abélien de $G$ défini par : $C(G) = \{x \in G : xy = yx \text{ pour tout } y \in G\}$.

Montrer les propriétés suivantes :

(a) $C(S_n) = \{\text{id}\}$ pour $n \geq 3$,

(b) $C(A_n) = \{\text{id}\}$ pour $n \geq 4$,

(c) Si $n \geq 3$, alors $C(D_n) = \{\text{id}\}$ pour $n$ impair et $C(D_n) \cong \mathbb{Z}_2$ pour $n$ pair.

**Exercice 6 (Extrait du partiel du 5 novembre 2008)** Rappelons que si $G$ est un groupe et si $\phi$ est un automorphisme de $G$, on dit que $\phi$ est un *automorphisme intérieur* de $G$ s'il existe $g \in G$ tel que $\phi(x) := gxg^{-1}$ pour tout $x \in G$.

Supposons que $n > 3$. Soit $\phi$ un automorphisme de $S_n$ qui transforme toute transposition en une transposition.

(a) Montrer qu'il existe trois éléments distincts $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\phi((1\ 2)) = (a_1\ a_2)$ et $\phi((1\ 3)) = (a_1\ a_3)$. En déduire que $\phi((2\ 3)) = (a_2\ a_3)$.

(b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $i > 3$. Montrer qu'il existe $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\phi((1\ i)) = (a_1\ a_i)$.

(c) Montrer que l'élément $\sigma$ défini par $\sigma(k) := a_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, appartient à $S_n$.

(d) Montrer que $\phi((k\ l)) = (a_k\ a_l)$ pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. En déduire que $\phi((k\ l)) = \sigma(k\ l)\sigma^{-1}$ pour tous$k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

(e) En déduire que $\phi(\gamma) = \sigma\gamma\sigma^{-1}$ pour tout $\gamma \in S_n$ (c'est-à-dire $\phi$ est un automorphisme intérieur de $S_n$).