Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2013-2014
Algèbre et Géométrie (M1)

Feuille de TD n^0 2 : Actions de groupes

Exercice 1 Soit G un groupe agissant sur deux ensembles S et T, d'actions notées respectivement $\varphi : G \times S \to S$ et $\psi : G \times T \to T$. Pour tout $g \in G$, on considère les deux applications $\varphi_g : S \to S$ et $\psi_g : T \to T$ qui sont définies respectivement par $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$ et $\psi_g(x) = \psi(g, x)$ pour tout $x \in S$. On dit que les actions φ et ψ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : S \to T$ telle que $f \circ \varphi_g = \psi_g \circ f$.

(a) Si G est un groupe agissant sur un ensemble S, on note G_x le stabilisateur de $x \in S$ dans G et $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x dans S sous l'action de G. Il est connu que pour tout $x \in S$ l'application $f : G/G_x \to \mathcal{O}_x$ définie par $f(gG_x) = gx$ est bien définie et bijective. Montrer que f est un isomorphisme entre l'action par translation à gauche de G sur G/G_x et l'action de G sur $\mathcal{O}_x$.

(b) Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que les actions de G par translation à gauche sur les quotients G/H et G/K sont isomorphes si et seulement si H et K sont conjugués dans G.

Exercice 2 Soient G un groupe et $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G. Pour tout $g \in G$, l'automorphisme intérieur associé à g est l'application $c_g : G \to G$ définie pour tout $x \in G$ par $c_g(x) := gxg^{-1}$.

(a) Montrer que $c_g \in \mathrm{Aut}(G)$ pour tout $g \in G$.

(b) On pose $\mathrm{Inn}(G) = \{c_g : g \in G\}$. Montrer que $\mathrm{Inn}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$

(c) Montrer que les groupes $\mathrm{Inn}(G)$ et $G/C(G)$ sont isomorphes (où $C(G)$ est le centre du groupe G).

(d) En déduire que si $G/C(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 3 Soit G un groupe qui possède un sous-groupe H d'indice fini tel que $H \neq G$. Montrer que G possède un sous-groupe normal propre d'indice fini.

Exercice 4 Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini d'ordre p^n et soit H un sous groupe normal de G d'ordre p. Montrer que $H \subset C(G)$.

Exercice 5 Le demi-plan de Poincaré est l'ensemble $\mathbb{H}$ des complexes qui ont une partie imaginaire strictement positive. Soit $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1.

(a) Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ définie par

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Z\Big) := \frac{aZ + b}{cZ + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}),\ Z \in \mathbb{H},$$

est une action du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.

(b) Déterminer le stabilisateur et l'orbite de i.