Université de Lorraine – Metz
Algèbre et Géométrie (M1)

Année universitaire 2013-2014

Feuille de TD n^0 3 : Théorèmes de Sylow, classification des groupes d'ordre fini

Exercice 1 **I.** Déterminer (à isomorphisme près) les groupes d'ordre 6.

II. Soit G un groupe d'ordre 15.

(a) Montrer que G est un groupe cyclique.

(b) En déduire la valeur du plus petit entier n tel que S_n possède un sous-groupe d'ordre 15. Décrire explicitement un tel sousgroupe dans S_n.

III. En utilisant les théorèmes de Sylow, montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 42 ou 105.

Exercice 2 (Extrait de l'examen du 23 juin 2010) Soit G un groupe d'ordre $2pq$ où p, q sont premiers et $2 < p < q$.

I. Montrer que si $q + 1 \neq 2p$, alors un q-sous-groupe de Sylow de G est distingué dans G.

II. On suppose par la suite que $q + 1 = 2p$. Soit H un p-sous-groupe de Sylow de G et K un q-sous-groupe de Sylow de G.

(a) Montrer qu'au moins l'un entre H et K est distingué dans G.

(b) Montrer que $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G. Déterminer son ordre.

(c) Montrer que HK est un sous-groupe cyclique de G.

(d) Déduire de ce qui précède que HK est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 3 (Extrait du partiel de novembre 2010) Soit G un groupe fini *simple* qui possède exactement huit 7-sous-groupes de Sylow.

(a) Montrer que 56 divise $|G|$.

(b) Montrer que $|G|$ divise $8!$.

[*Indication :* Considérer l'action par conjugaison de G sur l'ensemble des 7-sous-groupes de Sylow de G]

(c) Déduire de ce qui précède qu'un 7-sous-groupe de Sylow de G est d'ordre 7.

(d) Déterminer le nombre d'éléments de G qui sont d'ordre 7.

(e) Montrer que G possède au moins sept 2-sous-groupes de Sylow.

[*Indication :* Considérer l'action par conjugaison de G sur l'ensemble des 2-sous groupes de Sylow de G]

(f) Montrer que $|G| \geq 112$.

(g) Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 4 Soit G un groupe fini et p un nombre premier qui divise l'ordre de G. Montrer que si P est un p-sousgroupe de Sylow de G, alors $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$