Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2013-2014
Algèbre et Géométrie (M1)

Feuille de TD n^0 4 : Représentations des groupes finis, caractères

Exercice 1 Notons Q le groupe des quaternions $Q = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$.

(a) Vérifier qu'on définit une représentation de Q dans $\mathbb{C}^2$ en posant :

$$\pi(1) = -\pi(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi(i) = -\pi(-i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
$$\pi(j) = -\pi(-j) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi(k) = -\pi(-k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que cette représentation est irréductible.

Exercice 2 (questions (a) jusqu'à (d) : extrait de l'examen du 24 juin 2009) Soit ρ une représentation irréductible d'un groupe fini G sur un espace vectoriel complexe V de dimension finie n. On note χ_ρ le caractère de ρ.

(a) Montrer que pour tout $g \in G$ l'application linéare $\rho(g)$ est diagonalisable avec valeurs propres de module 1.

(b) Soit $Z(G)$ le centre de G. Montrer que pour tout $g \in Z(G)$ il y a un nombre complexe λ_g de module 1 tel que $\rho(g) = \lambda_g \mathrm{id}_V$, où id_V dénote l'application identité de V.

(c) Montrer que $|\chi_\rho(g)| = n$ pour tout $g \in Z(G)$.

(d) Déduire de ce qui précède que $n^2 \leq |G|/|Z(G)|$

(e) Montrer que $U = \{\lambda_g : g \in Z(G)\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ des nombres complexes de module 1.

(f) Montrer que tout sous-groupe fini de S^1 est cyclique. En déduire que si ρ est injective, alors $Z(G)$ est un groupe cyclique.

(g) Soit π une représentation de degré 1 de G. Montrer que $G/\operatorname{Ker}(\pi)$ est cyclique.

(h) Déterminer à isomorphisme près les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 3 .

I. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X non vide. On note $g \cdot x$ l'action de $g \in G$ sur l'élément $x \in X$. Soient V l'espace vectoriel complexe de base $\{x\}_{(x \in X)}$ et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ l'application définie par $\rho(g)(x) = g \cdot x$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

(a) Montrer que (V, ρ) est une représentation de G, appelée la représentation de permutation associée à l'action donnée de G sur X.

(b) Soit χ le caractère de ρ. Montrer que, pour tout $g \in G$, $\chi(g)$ est le nombre de points de X laissés fixes par g.

II. Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^4$ et soit $\rho : S_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$ la représentation de permutation associée à l'action de S_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$: donc $\rho(\sigma)(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout $\sigma \in S_4$ et $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On considère les sous-espaces vectoriels H_0 et H_1 de $\mathbb{C}^4$ définis par :

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \{\lambda(1, 1, 1, 1),\ \lambda \in \mathbb{C}\}\,, \\
H_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 :\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}
\end{aligned}
$$

(a) Montrer que H_0 et H_1 sont invariants par ρ et que $\mathbb{C}^4 = H_0 \oplus H_1$. Montrer aussi que la restriction de ρ à H_0 est la repésentation triviale.

(b) Déterminer les classes de conjugaison de S_4.

(c) Soit π la restriction de ρ à H_1. Calculer le caractère χ_π de π.

(d) Déduire de (c) que π est irréductible.

Exercice 4 (a) Déterminer les degrés des classes d'équivalence de représentations irréductibles de S_4.

(b) Soit π la représentation irréductible de degré 3 de S_4 determinée dans la partie **II.**(c) de l'exercice 3 et soit **sgn** la représentation associée à la signature des éléments de S_4. Montrer que $\pi \otimes$ **sgn** est une représention irréductible de S_4 de degré 3.

(c) Déterminer le tableau des caractères de S_4.