Feuille de TD n^0 5 : Quelques applications de la théorie des représentations

Exercice 1 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation du groupe fini G sur l'espace vectoriel complexe V, avec $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. On note χ_ρ le caractère de ρ. On définit

$$\mathrm{Ker}\,\chi_\rho = \{g \in G : \chi_\rho(g) = n\}\,.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\chi_\rho = \mathrm{Ker}\,\rho$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\chi_\rho$ est un sous-groupe normal de G.

(2) Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles distincts de G. On pose

$$K = \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\chi_k\,.$$

D'après (1), on on a $K \lhd G$. On note $p : G \to G/K$ la projection canonique. Soit (ρ_k, V_k) une représentation irreductible de G de caractère χ_k.

(2.a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$ il existe une représentation irréductible ρ'_k du groupe G/K telle que $\rho'_k \circ p = \rho_k$. Montrer que les représentations ρ'_k sont inéquivalentes.

(2.b) Déduire de ce qui précède que $|G/K| \geq |G|$ et conclure que $K = \{e\}$, où e dénote l'élément neutre de G.

(3) Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ comme dans (2). Montrer qu'un sous-groupe N de G est normal dans G si et seulement si il existe une partie $S \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ telle que $N = \cap_{k\in S} \mathrm{Ker}\,\chi_k$.

[*Indication :* appliquer (2.b) au groupe G/N]

(4) Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère non-trivial χ_k et pour tout $g \in G \setminus \{e\}$ on a $\chi_k(g) \neq \chi_k(e)$.

[Cet exercice montre qu'on peut utiliser la table des caractères de G pour décider si G est simple.]

Exercice 2 Soit G un groupe fini simple non-abélien.

(1) Montrer que G n'a pas de représentations non-triviales de degré 1.

(2) Dans cette partie on montre par contradiction que G ne possède aucune représentation irréductible de degré 2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ une représentation irréductible de G de degré 2.

(2.a) Montrer que $\det(\rho(g)) = 1$ pour tout $g \in G$.

(2.b) Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $\rho(x)$ a ordre deux, c'est-à-dire $\rho(x) \neq I$ et $\rho(x)^2 = I$.

(2.c) Conclure que $\rho(x) = -I$.

(2.d) Montrer que le centre de G n'est pas trivial et obtenir une contradiction.

(3) Montrer qu'il n'existe aucun groupe simple non-abélien d'ordres 20 ou 25.

Exercice 3 Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier. Déterminer les dimensions des représentations irréductibles de G et conclure que G est abélien.