Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2013-2014
Algèbre et Géométrie (M1)

Feuille de TD n^0 6 : Représentations induites

Exercice 1 (Extrait de l'examen du 29 août 2007) Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et (W, ρ) une représentation de H. On note $\pi := \operatorname{Ind}_H^G \rho$ la représentation induite de (W, ρ) de H à G. On rappelle que, si χ_ρ dénote le caractère de ρ, alors le caractère $\chi_\pi = \operatorname{Ind}_H^G \chi_\rho$ de π est donné par :

$$\chi_\pi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G, t^{-1}gt \in H} \chi_\rho(t^{-1}gt)\,.$$

(a) Soit $[G/H]$ un ensemble de représentants des classes latérales à gauche de H dans G. Montrer que pour tout $g \in G$ on a

$$\frac{1}{|H|} \sum_{t \in G, t^{-1}gt \in H} \chi_\rho(t^{-1}gt) = \sum_{t \in [G/H], t^{-1}gt \in H} \chi_\rho(t^{-1}gt)\,.$$

(b) Par la suite on suppose que $G = S_3$ et que $H =< (123) >$ est le sous-groupe normal de S_3 d'ordre 3. Calculer le caractère de la représentation induite $\operatorname{Ind}_H^G(\text{triv})$ où triv dénote la représentation triviale de H.

(c) En déduire la décomposition en irréductibles de $\operatorname{Ind}_H^G(\text{triv})$.

Exercice 2 Soient G un groupe fini, χ un caractère de G et N un sous-groupe *normal* de G d'indice n. Montrer que si $\psi = \chi|_N$ est un caractère irréductible de N, alors

$$\langle \operatorname{Ind}_N^G \psi, \operatorname{Ind}_N^G \psi \rangle = n\,.$$

Exercice 3 Soit $G = A_4$. On admet que $[G, G] = \{\mathrm{id}\,, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

1. Déterminer les classes de conjugaison de G.
2. Déterminer la table des caractères de G.
3. Soit H le sous-groupe de G engendré par la permutation (123) et soit φ le caractère de H défini par
$$\varphi((123)) = j \qquad \text{où} \qquad j = e^{2i\pi/3}\,.$$
On pose $\chi = \operatorname{Ind}_H^G \varphi$.
   (a) Montrer, sans le calculer, que χ n'est pas un caractère irréductible de G.
   (b) Calculer χ et déterminer sa décomposition en caractères irréductibles.
4. On considère $\chi' = \operatorname{Ind}_G^{S_4} \chi$. Est-il irréductible ?
5. Soit $\chi'' = \operatorname{Ind}_H^{S_4} \varphi$. Montrer, sans calcul, que $\chi' = \chi''$.

Exercice 4 Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G d'indice m.

(a) Montrer que pour tout caractère irréductible χ de G il existe un caractère irréductible ψ de H tel que $m\psi(e) \geq \chi(e)$, où e denote l'élément neutre de G.

[*Indication :* dcomposer $\chi|_H$ en caractères irréductibles de H. Utiliser la formule de réciprocité de Frobenius.]

(b) Déduire que si H est un groupe abélien, alors tout caractère irréductible de G a degré $\leq m$.

(c) Déduire de ce qui précède que le groupe diédral D_n n'a que de représentations irréductibles de dimensions 1 ou 2. Montrer aussi que D_n doit avoir une représentation irréductible de dimension 2.