Partiel du 25 mars 2014
Durée : 2 heures

Questions de cours [5 points]

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. [1 point] Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. [1 point] Donner la définition de l'espace vectoriel somme $F + G$ de F et G.

3. [2 points] Montrer que $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

4. [1 point] Enoncer sans preuve la formule de Grassmann pour la dimension de $F + G$.

Exercice 1. [5 points]

Soit $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - \alpha yz = 0,\ y - z = 0\}$.

(a) Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Justifier votre réponse.

(b) Pour les valeurs de α déterminées en (a), donner la dimension et une base de V.

Exercice 2. [8 points]

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$\vec{u} = (2, 0, 1, 0)\,, \quad \vec{v} = (-1, 1, 0, 1), \quad \vec{w} = (0, 3, -1 - 1)\,, \quad \vec{x} = (1, 0, 0, 0)\,, \quad \vec{y} = (1, 0, 0, 1)\,.$$

(a) Vérifier que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une famille libre.

(b) Si possible, compléter $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Est-ce que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}\}$ est génératrice ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. [4 points]

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Soient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA \right\}.$$

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la dimension et une base de E.