Université de Lorraine – Metz
Algèbre Linéaire 1 (L1)

Année universitaire 2013-2014

Feuille de TD n^0 1 : Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1 On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ des opérations d'addition $+$ usuelle et de la multiplication par nombres réels $\bullet$ définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ and $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)\,.$$

Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Indiquer lesquels parmi les axiomes d'espaces vectoriels sont vérifiés et lesquels ne le sont pas.

Exercice 2 On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou à valeurs complexes (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). L'addition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

La multiplication de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est la suite $\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Montrer que, muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 3 On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels positifs des opérations d'addition $\ddagger$ et de la multiplication par nombres réels $\odot$ définies pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} x \ddagger y &= xy \qquad \text{(le produit usuel de nombres réels)} \\ \lambda \odot x &= x^{\lambda}. \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \ddagger, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$?

(a) $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$
(b) $E_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = y + z = 0\}$
(c) $E_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x - y = 2\}$

Exercice 5 Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 à coefficients réel. Parmi les sous-ensembles suivants de $M_2(\mathbb{R})$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

(a) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ où $B \in M_2(\mathbb{R})$ est une matrice fixée,

(b) $\left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1\right\}$

(c) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ où $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dénote la transposée de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

(a) l'ensemble des fonctions dérivables,

(b) l'ensembles des fonctions paires,

(c) l'ensemble des fonctions monotones,

(d) $\{f \in \mathcal{F} : \text{la limite } \lim_{x\to 0} f(x) \text{ existe}\}$,

(e) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$

(f) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$

(g) $\{f \in \mathcal{F} : f(x^2) = (f(x))^2\}$

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) On définit le sous-enseble $F + G$ de E par

$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in F, \vec{v} \in G\}.$$

Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Donner un example d'espaces E, F et G tels que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.