Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2013-2014
Algèbre Linéaire 1 (L1)

Feuille de TD n^0 2 : Indépendance linéaire, bases

Exercice 1 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 5, 7)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 3, 4)$ sont linéairement indépendants ? Et les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, où $\overrightarrow{w} = (1, 2, 3)$?
2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont linéairement indépendants, où $\overrightarrow{x} = (-1, 2, 0)$.
3. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, -3, 7)$, $\overrightarrow{v_2} = (2, -1, -1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (-4, 2, 2)$ forment une famille liée ? Écrire, si possible,
   (a) $\overrightarrow{v_1}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$,
   (b) $\overrightarrow{v_2}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$,
   (c) $\overrightarrow{v_3}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
4. Déterminer lesquelles parmi les familles suivantes sont génératrices de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}, \quad \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}, \quad \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\}, \quad \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}.$$

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{u_1} = (1, 2t, 1), \quad \overrightarrow{u_2} = (2, 5, -2t), \quad \overrightarrow{u_3} = (1, t+2, 1), \quad \overrightarrow{u}_4 = (3, 8, 3).$$

(a) Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\}$ est-elle libre ?
(b) Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ est-elle libre ?

Exercice 3 Déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{C}^3$ (voir TD n^0 1, Exercice 4(a)).

Exercice 4 On considère les matrices $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer si A, B et C sont linéarment indépendantes.
(b) Si possible, écrire D comme combinaison linéaire de A, B et C.

Exercice 5 Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 à coefficients réel. Déterminer la dimension et une base des sous-espaces vectoriels suivants de $M_2(\mathbb{R})$ (voir TD n^0 1, Exercice 5) :

(a) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ où $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dénote la transposée de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3$ comme dans l'exercice 1.3 ci-dessus.

(a) Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$. Compléter la base de E trouvée en une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Vérifier que $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ où $\overrightarrow{w_1} = (1, 1, -5)$ et $\overrightarrow{w_2} = (1, 2, -8)$.

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes dans la variable x à coefficients réels de degré ≤ 3

(a) Montrer que $\{x^3 + 1, x^2 - x, x - 1, x^2 + 1, 1\}$ est une famille generatrice de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ contenue dans cette famille.

(c) Déterminer les composantes du polynome $2x^3 + x^2$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et soit $E = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\,, \qquad \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\,, \qquad \overrightarrow{u_2} = 4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}\,.$$

Determiner la dimension et une base de E.

Exercice 9 Soient $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Déterminer si f,g et h sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.