

Feuille de TD n⁰ 3 : Sommes et sommes directes

Exercice 1 Soient F et G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 donnés par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 2t = 0\},$$
$$G = \text{Vect} \{(1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5)\}.$$

- (a) Déterminer la dimension et une base de F et de G .
- (b) Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$ et de $F + G$.
- (c) Est-ce que le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ appartient à $F + G$?

Exercice 2 On considère les sous-espaces vectoriels $M_2(\mathbb{R})$ donnés par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + 2b = 0 \right\},$$
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = b + 2c = 0 \right\}.$$

Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$ et de $F + G$.

Exercice 3 Dans \mathbb{R}^4 on considère le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect} \{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$, où

$$\vec{r} = (-1, 1, 5, 4), \quad \vec{s} = (0, 3, -2, 1), \quad \vec{t} = (2, 7, -16, -5).$$

Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de G dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}_4[x]$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \text{Vect}(1 - x + x^4), \quad F = \text{Vect}(1, x^3), \quad G = \text{Vect}(x, x^3).$$

Déterminer la dimension et une base de $E + F + G$. Est-ce E et F sont en somme directe ?
Et E, F et G ?