Feuille de TD n^0 4 : Applications linéaires

Exercice 1 Parmi les applications suivantes déterminer lesquelles sont linéaires sur $\mathbb{R}$. Pour chacune de celles-ci, déterminer son noyau et son image. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2 + x\,,$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 2x - 1\,,$
$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y) \mapsto (-y, x + 2y)\,,$ $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}\,,$
$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}z$ $f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto 2\overline{z} + 1\,,$
$f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x - 3y + 1\,,$ $f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y, z) \mapsto (x - y, z)\,,$
$f_9 : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}\,, \quad p(x) \mapsto p(0)\,,$ $f_{10} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad A \mapsto \mathrm{trace}(A)\,,$
$f_{11} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})\,, \quad A \mapsto A - A^t\,,$ où A^t dénote la transposée de A

Est-ce que les applications f_4, f_5 et f_6 sont linéaires sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2 Soit $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ la dérivation de polynômes, définie par $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Montrer que D est linéaire, surjective, mais pas injective.

Exercice 3 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que la composée $g \circ f$ est une application linéaire.
(b) On rappelle que si f est une application linéaire bjective (donc un isomorphisme), alors f^{-1} aussi est une application linéaire. Déduire de ce qui précède que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel E muni de la loi de composition d'applications est un groupe.
(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f((-1, 1)) = (1, 0, 1)$ et $f((2, -1)) = (1, 1, -1)$.

(a) Déterminer $f((3, 3))$.
(b) Déterminer $f((x_1, x_2))$.
(c) Déterminer la dimension et une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.
(d) Déterminer la dimension et une base du noyau $\mathrm{Im}(f)$ de f.

Exercice 5 Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension 3 et 4, respectivement. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\}$ une base de F. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ définie par

$$
\begin{aligned}
f(\vec{e}_1) &= 2\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3 - \vec{f}_4 \\
f(\vec{e}_2) &= \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - 2\vec{f}_4 \\
f(\vec{e}_3) &= -\vec{f}_1 - 5\vec{f}_2 + 5\vec{f}_3 - 4\vec{f}_4.
\end{aligned}
$$

Déterminer des bases pour le noyau et pour l'image de f.

Exercice 6 Le systéme d'équations linéaires :

$$\begin{cases} y_1 &= & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 \\ y_2 &= & & & ax_2 & - & x_3 & + & bx_4 \\ y_3 &= & bx_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \end{cases}$$

décrit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ donnée par $(y_1, y_2, y_3) = f((x_1, x_2, x_3, y_4))$. Ici a et b sont des paramètres réels.

(a) Déterminer les valeurs de a et b afin que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$.

(b) Pour les valeurs de a et b déterminées en (a), donner des bases de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 7 Soient

$$\begin{aligned} &F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\} \\ &G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = x_4 = 0\} \\ &H = \operatorname{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \qquad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = (1,1,1,1) \text{ et } \vec{u}_2 = (1,1,0,0). \end{aligned}$$

(a) Déterminer la dimension et une base de F.

(b) Vérifier que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G = F \oplus H$.

(c) Donné $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on peut écrire (de façon unique) $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ avec $\vec{x}_F = ((x_F)_1, (x_F)_2, (x_F)_3, (x_F)_4) \in F$ et $\vec{x}_G = ((x_G)_1, (x_G)_2, (x_G)_3, (x_G)_4) \in G$. On rappelle que x_F est dit la projection vectorielle de $\vec{x}$ sur F parallélement à G et $\vec{x}_G$ est dit la projection vectorielle de $\vec{x}$ sur G parallélement à F. Déterminer $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$.

(d) On considère maintenant la décomposition $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_H$ de $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par rapport à la décomposition $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$. Déterminer $\vec{x}_F$.
(Remarquer que le résultat est différent de celui de la question (c). En effet, la projection vectorielle $\vec{x}_F$ de $\vec{x}$ sur F parallélement à G dépend de F **et** de G.).