Université de Lorraine – Metz   Année universitaire 2013-2014
Algèbre Linéaire 1 (L1)

Feuille de TD n^0 5 : Calcul matriciel

Exercice 1 Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
On note D^T la transposée de la matrice D. Effectuer, si cela est possible, les produits A^TB, AB^T, AB, B^TA, A^TB^T, A^2.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, si possible, l'inverse de A.

Exercice 3 Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $B^2 - B - 2I = 0$, où I et 0 denotent respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

(b) Déduire de (a) que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Exercice 4 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte si $a_{i,j} = 0$ lorsque $1 \leq j \leq i \leq n$. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0$.

Exercice 5 Soit a un réel non nul et soient
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1-a \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1/a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pour lesquelles P est inversible et pour ces valeurs calculer P^{-1}.

(b) Soit a comme dans (a). Montrer que $C = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.

(c) On fixe $a = 1$. Calculer C^{251} et C^{32}.

Exercice 6 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la matrice A comme produit de matrices élémentaires.

(b) Déduire de (a) que A est inversible et déterminer A^{-1}.

(c) Transformer B en une matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

(d) Transformer la matrices obtenue en (c) en une matrice échellonée réduite par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.

(e) Transformer la matrices obtenue en (c) en une matrice échellonée réduite par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.