Université de Lorraine – Metz
Année universitaire 2013-2014
Série et transformations
(L2, SPIAAPR)
18/12/2013

Nom :
Prénom :
No. étudiant :

Contrôle n^0 2 : Séries de Taylor, séries de Fourier
Durée : 2 heures

Questions de cours (4 points).
[Barême : (1) 1, (2) 1, (3.a) 0,5, (3.b) 0,5, (4) 1]

Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. On rappelle que $[a, b]$ dénote l'intervalle de $\mathbb{R}$ formé par les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.

(1) Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
(2) Donner la définition d'une fonction C^1 par morceaux sur $[a, b]$.
(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
   (a) Ecrire les formules qui définissent les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f.
   (b) Ecrire la formule de la série de Fourier de f en forme réelle.

(4) Calculer l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx$$
en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1 (6 points) .

(a) Développer en série de Maclaurin la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$.
(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.
(c) Développer en série entière en 0 la fonction $g(x) = \log(1 + x)$.
(d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

Turnez svp →

Exercice 2 (3 points) .
On rappelle que le développement en série de Maclaurin de la fonction $\sin x$ est

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \tag{*}$$

(avec rayon de convergence $R = +\infty$).

(a) Déduire de (*) le développement en série de Maclaurin de la fonction $h(x) = x^2 \sin(x)$.

(b) Déduire de (*) le développement en série de Maclaurin de la fonction $g(x) = \sin(x^3)$

(c) Déduire de (a) la valeur $h^{'''}(0)$ de la dérivée troisième en $x = 0$ de la fonction $h(x) = x^2 \sin(x)$.

Exercice 3 (7 points) .
On considère la fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Montrer que f est C^1 par morceaux.

(c) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

(d) Ecrire la série de Fourier de f en forme réelle.

(e) Calculer la somme de la série de Fourier de f en tout $x \in [-\pi, \pi]$.

(f) Calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} .$$
