

**Feuille de TD n° 1 : Séries**

**Exercice 1** Ecrire les quatre premiers termes de la série de terme générale  $u_n$  où

$$u_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1} \quad \text{and} \quad u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}.$$

**Exercice 2** Ecrire le terme général  $u_n$  des séries  $\sum u_n$  suivantes :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$
$$\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$$

**Exercice 3** Calculer les sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  où  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . En déduire la nature de la série.

**Exercice 4** Pour chacune des séries suivantes, déterminer une série de comparaison permettant de décider de la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{3^n + 1}{4^n + n}.$$

**Exercice 5** Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n + 1}$

**Exercice 6** On considère la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  où  $u_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ .

- (a) Ecrire les six premiers termes de la série.
- (b) Ecrire le terme général de la série  $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ .
- (c) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge absolument.
- (d) Est-ce que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge ?

**Exercice 7** Déterminer la nature des séries de terme général  $u_n$  égal à :

- (a)  $\frac{n^3}{3^n}$
- (b)  $\frac{1 + n^2}{n!}$
- (c)  $\left(\frac{2n + 3}{3n + 4}\right)^n$
- (d)  $\frac{3^n}{5^n + n}$
- (e)  $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$
- (f)  $\frac{2n - 1}{(\sqrt{2})^n}$